Sas Viktor okl. építőmérnök

Gerendatartók igénybevétel- és alakváltozás függvényei

H-Székesfehérvár, 2021.11.26.

Tiszteletül ajánlom
Wolkensdorfer János Tanár Úrnak,
gimnáziumi matematika- fizika tanáromnak,
aki diákok százainak mutatta meg a matematika és a fizika szépségét.

Összefoglaló

A szögelfordulás és a lehajlás függvényként való előállításának módszerét a tankönyvek csak megemlítik, de konkrét példán való végigvitelét általában nem ismertetik. Ennek oka, hogy a mérnöknek gyakorlati szempontból az elmozdulások maximális értékeire van szüksége, ezért a tankönyvek a lehajlás vagy elfordulás egy pontban való számítására fókuszálnak. Napjainkra a CAD szoftverek annyira elterjedtek, hogy a gyakorló mérnökök a tartószerkezetek méretezését, az igénybevételek és az alakváltozások számítását szinte kizárólag ezekkel végzik. E cikk célja nem a gyakorlati alkalmazás, hanem a tartószerkezetek működésének jobb megértése, a mérnöki szemlélet és az elméleti tudás elmélyítése. A cikk ismerteti az igénybevételi és alakváltozási függvények előállításának elméletét, és a tartók alapesetein bemutatja azokat.

Tartalom

1. Bevezetés

Mint ismeretes, gerendatartón a nyíróerő-, a hajlítónyomaték-, a szögelfordulás- és a lehajlási függvényeket – ebben a sorrendben – a teherfüggvény integrálásaival állíthatjuk elő. A szögelfordulásra és a lehajlásra függvényként általában nincs szükségünk, inkább csak azok maximuma érdekes a gyakorló mérnök számára.

A szögelfordulás vagy az elmozdulás (összefoglaló néven alakváltozás) kiszámítását egy bizonyos pontban minden e témával foglalkozó tananyag ismerteti. A kérdéses pontban egységnyi virtuális terhet működtetünk (szögelfordulás számítása esetén egységnyi hajlítónyomatékot, elmozdulás esetén egységnyi koncentrált terhet), előállítjuk az igénybevételi ábrákat (a normálerő, nyíróerő és hajlítónyomatéki függvényeket) a tényleges teherből és a virtuális teherből, majd a két igénybevételei ábra szorzatát integráljuk a tartó hosszán, és osztjuk a merevséggel (normálerők esetén FA-val, hajlítónyomaték esetén EI-vel, nyírás esetén GA-val).

Statikailag határozatlan tartók erőmódszerrel történő megoldásakor fontos, hogy azokon a pontokon, ahol kényszereket szabadítunk föl, meg tudjuk határozni a szögelfordulást vagy az elmozdulást. Erre jól kidolgozott módszer áll rendelkezésre. A kérdéses helyen a föloldott kényszernek megfelelő egységnyi terhet működtetünk, és az előző bekezdés szerinti módszerrel számoljuk ki a szögelfordulást vagy az elmozdulást.

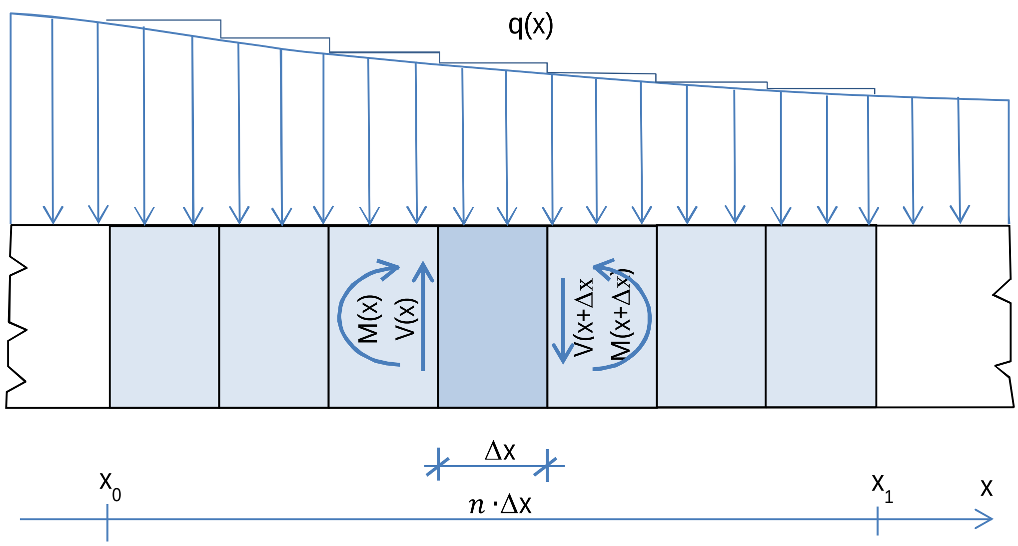
A szögelfordulás és a lehajlás függvényként való előállításának módszerét a tankönyvek csak megemlítik, de konkrét példán való végigvitelét általában nem ismertetik. Napjainkra a CAD szoftverek annyira elterjedtek, hogy a gyakorló mérnökök a tartószerkezetek méretezését, az igénybevételek és az alakváltozások számítását szinte kizárólag ezekkel végzik. E cikk célja nem a gyakorlati alkalmazás, hanem a tartószerkezetek működésének jobb megértése, a mérnöki szemlélet és az elméleti tudás elmélyítése.

2. Elméleti áttekintés

2.1. Statikai terhek

2.1.1. Igénybevételi és alakváltozási függvények megoszló teher esetén

Tekintsük a tartó egy x_0-tól x_1-ig terjedő szakaszát, amelyen q(x) megoszló teher hat. Osszuk föl e szakaszt n db rövid, egyenlő Δx hosszúságú részre. Egy rövid részen belül a teherfüggvény állandó nagyságúnak tekinthető.



Egy közbenső rész függőleges vetületi egyenlete:

$$V(x+\Delta x) - V(x) = \Delta V(x) = -q(x)\cdot\Delta x$$

A teljes szakaszon a nyíróerő megváltozását a részeken való nyíróerő-változások összegzésével kapjuk:

$$V(x_1) - V(x_0) = -\sum_{i=1}^{n} q(x_i)\cdot\Delta x$$

Minél sűrűbb a felosztás, annál pontosabb az eredmény. A felosztást a végtelenségig sűrítve:

$$V(x_1) = V(x_0) - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} q(x_i)\cdot\Delta x = V(x_0) - \int_{x_0}^{x_1} q(x)\cdot dx$$

Ha x_1-et változónak tekintjük, megkapjuk a nyíróerő függvényét:

$$\boldsymbol{V(x) = V_0 - \int_{x_0}^{x} q(x) \cdot dx}$$

A függvény határozott integrálként való kezelését (amelynél a tartomány vége változó) nevezhetjük mérnöki szemléletmódnak. A matematikai megközelítés az, hogy az első egyenletből:

$$\frac{\Delta V(x)}{\Delta x} = V'(x) = -q(x)$$

Tehát olyan nyíróerő-függvényt keresünk, melynek deriváltja a teherfüggvény. Mivel a konstans deriváltja nulla, sok ilyen függvény van, ezek egy konstansban térnek el egymástól:

$$V_h(x) = -\int q(x) \cdot dx$$

Ez határozatlan integrál (erre utal a h index), egy függvényhalmaz, elemei a primitív függvények. Statikai szempontból ezek közül csak egy felel meg:

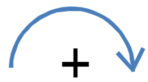
$$\boldsymbol{V(x) = V_P(x) + C_V}$$

$V_P(x)$ az egyik primitív függvény, amelyet a C_V konstans hozzáadásával módosítunk, hogy a statikai követelményeknek megfeleljen. C_V értékét peremfeltételből kaphatjuk. Perem lehet a tartó bármely pontja, ahol a nyíróerő értékét ismerjük. Célszerűen ez a tartó egyik vége, ahol statikailag határozott tartó esetén a nyíróerőt egyensúlyi egyenletekből ki tudjuk számolni.

Folytonos függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a meredeksége nulla, azaz a deriváltja nulla. A nyíróerő függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a megoszló teher nulla.

Egy közbenső rész nyomatéki egyenlete a rész jobb végére:

$$M(x) - M(x + \Delta x) + V(x) \cdot \Delta x - {}^1/_2 \cdot \Delta x \cdot q(x) \cdot \Delta x = 0$$



Az utolsó tag márodrendűen kicsi, ezért elhagyható.

$$\Delta M(x) = V(x) \cdot \Delta x \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta M(x)}{\Delta x} = V(x) \quad \rightarrow \quad M'(x) = V(x)$$

$$M_h(x) = \int V(x) \cdot dx$$

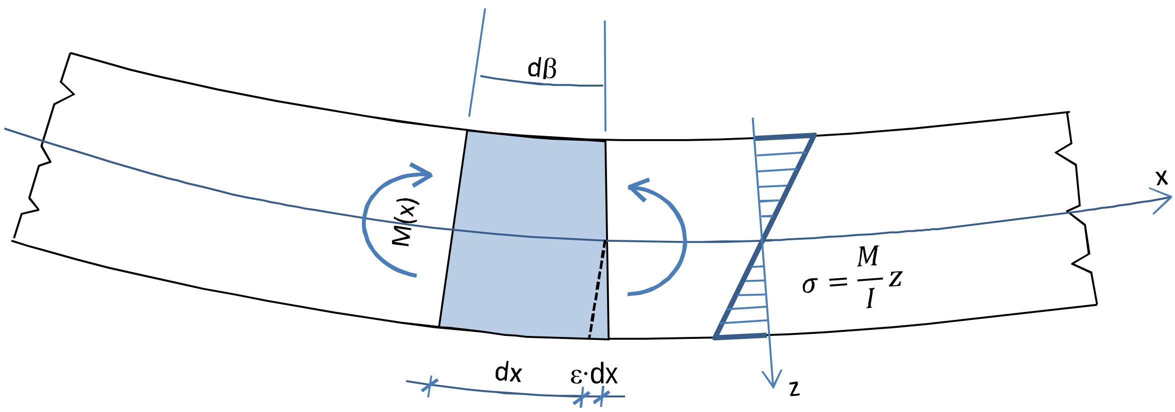
A nyíróerő-függvénynél bemutatott gondolatmenettel megegyezően:

$$\boldsymbol{M(x) = M_P(x) + C_M}$$

A C_M konstans értékét itt is peremfeltételből kaphatjuk.

A hajlítónyomaték függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja nulla, azaz a nyíróerő nulla.

A következő ábrán a keresztmetszeten belüli feszültségeloszlást látható rugalmas anyagmodell esetén:



A Hoocke-törvény szerint: $\sigma = E \cdot \varepsilon$ Behelyettesítve a feszültségeloszlást:

$$E \cdot \varepsilon = \frac{M}{I} \cdot z \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{z} = \frac{M}{E \cdot I} \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon \cdot dx}{z} = \frac{M}{E \cdot I} \cdot dx$$

$$-d\beta = \frac{M}{E \cdot I} \cdot dx \quad \rightarrow \quad \beta'(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I}$$

$$\beta_P(x) = -\int \frac{M(x)}{E \cdot I} \cdot dx$$

$$\boldsymbol{\beta(x) = \beta_P(x) + C_\beta}$$

A C_β konstans értékét itt is peremfeltételből kaphatjuk. Ha az inercia a tartó hossza mentén állandó, akkor EI –t kiemelhetjük az integrálból, ha változó, akkor függvényként benn kell hagynunk.

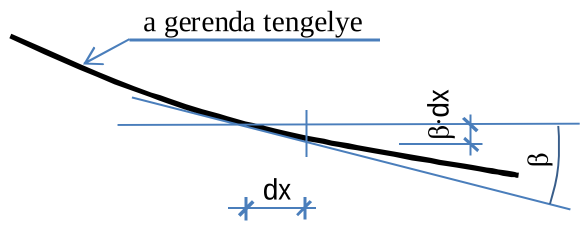
Az elfordulás függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja nulla, azaz a hajlítónyomaték nulla.

A lehajlás növekménye: $de = \beta \cdot dx$

$$e'(x) = \beta(x)$$

$$e_h(x) = \int \beta(x) \cdot dx$$

$$\boldsymbol{e(x) = e_P(x) + C_e}$$

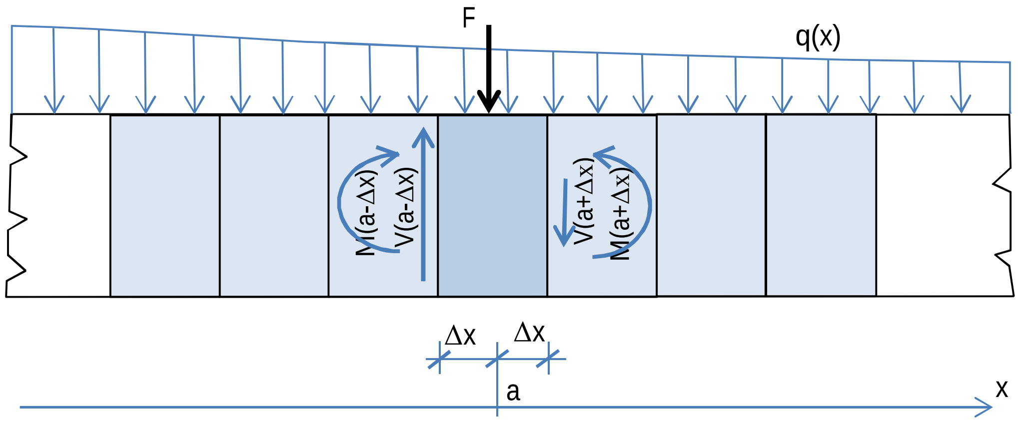


A C_e konstans értékét itt is peremfeltételből kaphatjuk.

A lehajlás-függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja nulla, azaz az elfordulás nulla.

2.1.2. Koncentrált teher

Mint láttuk, a nyíróerőt a hossz mentén haladva a teherfüggvény folyamatos összegzésével, azaz integrálásával kapjuk. Ha a hossz mentén haladva átugrunk egy koncentrált terhet, az összegzésbe azt is bele kell vonni. A nyíróerő egy differenciálisan kicsi hosszon a koncentrált teher értékével fog megváltozni. ***A koncentrált erő helyén a nyíróerő-függvénynek szakadása, ugrása van.*** Hasson az x = a helyen egy F koncentrált erő:



$$V(a + \Delta x) - V(a - \Delta x) = -q(A) \cdot \Delta x - F$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} V(a + \Delta x) - V(a - \Delta x) = -F$$

$$V(a + 0) - V(a - 0) = -F$$

Az ábrán látható, hogy az F erő rövid környezetében a hajlítónyomaték változása kicsi, mert az erők erőkarja kicsi. ***Koncentrált tehernél a nyomatékfüggvénynek törése van***, mert az erő két oldalán a nyíróerő értéke, azaz a nyomatékfüggvény deriváltja eltérő.

A támaszoknál működő reakcióerő a függvények viselkedése szempontjából ugyanúgy működik, mint a koncentrált teher.

2.1.3. Koncentrált nyomaték-teher

Hasonló gondolatmenettel belátható, hogy ***koncentrált nyomaték-tehernél a nyomatékfüggvénynek van ugrása***. Ha a koncentrált nyomatékteher a rúdon kijelölt rövid szakaszon működik, e rövid szakasz vetületi egyenlete nem változik, tehát ***koncentrált nyomaték-tehernél a nyíróerő-függvénynek sem ugrása, sem törése nincs.***

2.2. Peremfeltételek

A peremfeltételeket lépésenként meg kell vizsgálni! Ha valamelyik függvénynél nincs ismert peremfeltétel, az integrálási konstanst ismeretlenként tovább kell vinni. Ha a peremfeltételből adódóan az integrálási állandó 0, azt törölni kell, nem szabad paraméterként továbbvinni!

Statikailag határozott tartóknál a reakcióerők mindig meghatározhatók az elfordulási és lehajlási függvények ismerete nélkül, ezért a nyíró és nyomatéki integrálási állandók mindig ismertek lesznek, azokat nem kell paraméterként tovább vinni. Ez a definícióból következik: statikailag határozott az a tartó, amely reakcióerői és belső igénybevételei pusztán egyensúlyi egyenletekkel meghatározhatóak. A statikailag határozatlan tartóknál ez nincs így, az elfordulási vagy elmozdulási peremfeltételekből tudjuk visszaszámolni az igénybevétel-függvények paramétereit.

2.3. Kinematikai terhek

2.3.1. Definíció, általános összefüggések

A kinematikai teher alakváltozási teher, pl. támasz-elmozdulás, rúd-görbeség, rúdhossz-változás. A hőmérséklet-változás hőtágulással jár, amely megváltoztatja a szerkezet alakját, ezért ez is kinematikai teher. Speciális esetben előfordulhat, hogy az alakváltozás gátolt, és a szerkezet alakja nem változik. Pl. könnyen belátható, hogy ha egy mindkét végén befogott gerendára lineárisan egyenlőtlen hőmérséklet-változás hat (a keresztmetszeten belül a hőmérséklet változása a magasság mentén lineáris), akkor az továbbra is egyenes marad: A szimmetria miatt a befogási nyomaték a két végen egyenlő. Ha nem lenne befogás, a hőmérsékleti teher miatt a gerenda alakja körív lenne. A végeken egyenlő nyomatékkal terhelt gerenda alakja szintén körív. Az együttes hatás is körív. A körív középpontját a tengelyre merőleges keresztmetszeti síkok metszik ki. Mivel a befogás miatt a vég-keresztmetszetek nem fordulhatnak el, a körív középpontja a végtelenben van, tehát a gerenda egyenes marad. Ez a függvények előállításából is kiderül, lásd a 3.7. szakaszt.

Statikailag határozott tartón csak alakváltozások keletkeznek. Statikailag határozatlan tartón a kinematikai teher reakcióerőket, ezzel együtt belső igénybevételeket is okoz.

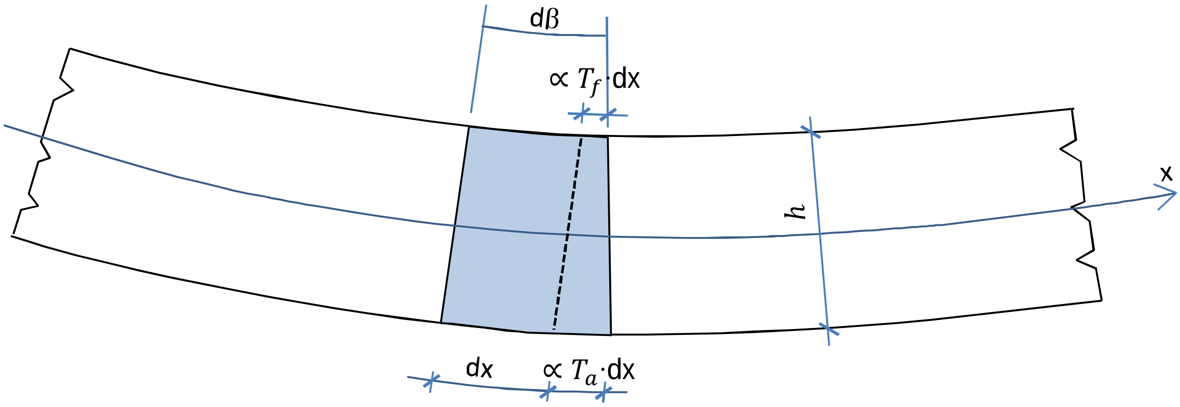
A kinematikai teher lehet egy peremfeltétel, pl. támasz-süllyedés vagy támaszelfordulás. Ez módosítja az igénybevétel-függvények paramétereit is, tehát módosulnak az igénybevételek.

Előfordulhat, hogy a kinematikai teher függvényként adható meg, pl. a rúd kezdeti görbületének hossz menti függvényeként (ha egy ilyen görbült rudat többtámaszú tartóként azonos magasságú támaszokra építenek be, máris igénybevételek keletkeznek). A görbület az elfordulás változása, azaz az elfordulás-függvény deriváltja. A görbület-függvény integrálásával tehát megkapjuk az elfordulás-függvényt. Az is előfordulhat, hogy a rúdgörbeséget az egyenestől való eltérésként határozzuk meg a hossz függvényében. Ez esetben ismert a kezdeti elmozdulás-függvény.

A kinematikai teher alakváltozás-függvényét hozzá kell adni a statikai terhekből származó alakváltozás-függvényhez! Statikailag határozatlan tartón a teher-függvény integrálásait akkor is végig kell csinálni, ha nincs statikai teher, ugyanis a kinematikai terhekből reakcióerők keletkeznek, amelyek ugyanúgy viselkednek, mint a statikai terhek.

2.3.2. Hőmérséklet-változási teher

A beépítési hőmérséklethez képest a keresztmetszet alsó élének hőmérséklete emelkedjen T_a-val, fölső élének hőmérséklete T_f-el. A keresztmetszet magassága mentén a hőmérséklet-változás legyen lineáris!



A fenti ábrán a hőtágulást ábrázoltuk, α a hőtágulási együttható.

$$d\beta_T = -\frac{\alpha(T_a - T_f)dx}{h} \rightarrow \qquad \beta_T'(x) = -\frac{\alpha \cdot \Delta T}{h} \quad \rightarrow \qquad \beta_T(x) = -\int \frac{\alpha \cdot \Delta T}{h} \cdot dx$$

$$\boldsymbol{\beta_T(x) = -\beta_{T,P}(x) + C_{T,\beta}}$$

Az állandókat kiemelhetjük az integrál elé. Ha a hossz mentén a keresztmetszet magassága és az alsó-felső él hőmérsékletének különbsége állandó, akkor minden változót kiemelhetünk. Ekkor az egyenlőtlen hőmérséklet-változásból adódó fajlagos szögelfordulás (és a görbület) a hossz mentén állandó.

A statikai terhekből és a kinematikai teherből adódó alakváltozás-függvényt összegezve:

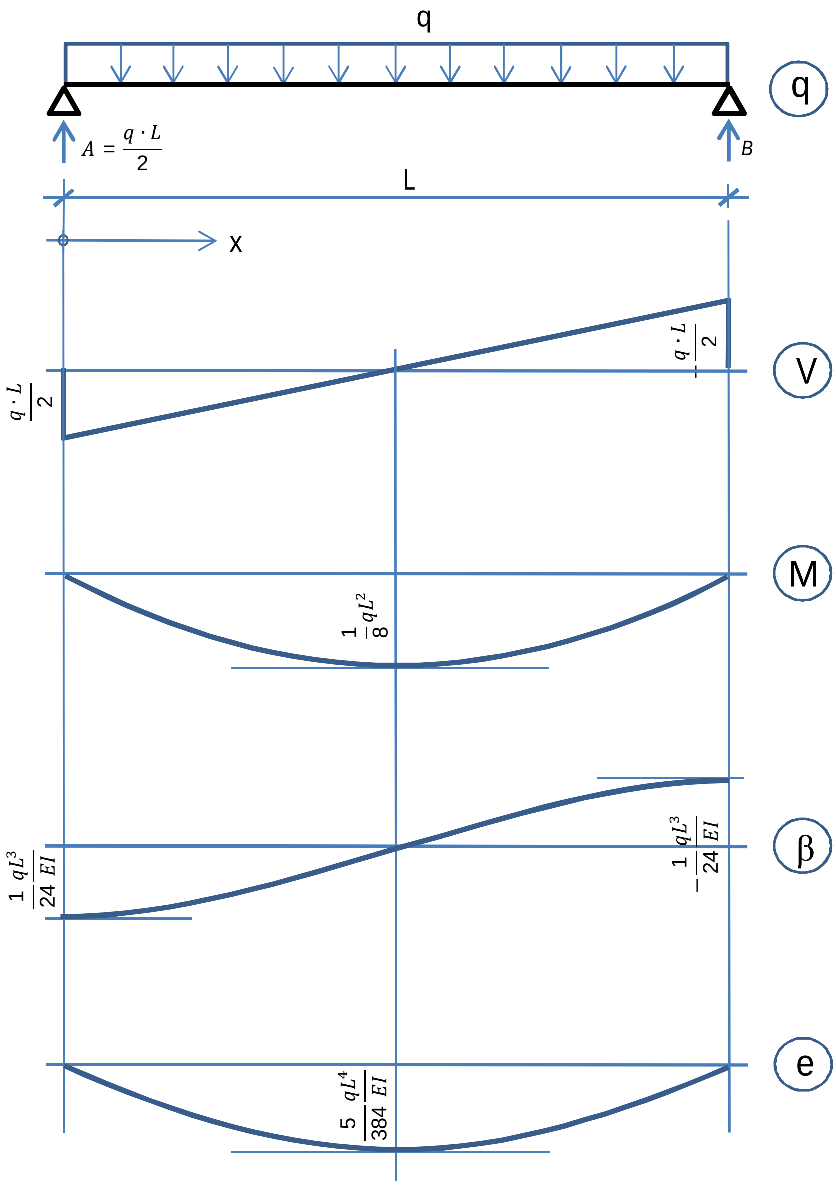
$$\beta(x) = \beta_S(x) + \beta_T(x)$$

$$\beta(x) = \beta_{S,P}(x) + \beta_{T,P}(x) + C_{S,\beta} + C_{T,\beta}$$

$$\boldsymbol{\beta(x) = \beta_{S,P}(x) + \beta_{T,P}(x) + C_\beta}$$

3. A leggyakoribb tartók és terheléseik

3.1 Kéttámaszú tartó konstans megoszló teherrel



$$\boldsymbol{q(x) = q}$$

$$V_h(x) = -\int q(x)\cdot dx$$

$$V_h(x) = -\int q\cdot dx$$

$$V(x) = C_V - q\cdot x$$

$$V(0) = \frac{q\cdot L}{2} \quad\rightarrow\quad C_V = \frac{q\cdot L}{2}$$

$$\boldsymbol{V(x) = q\cdot\left(\frac{L}{2} - x\right)}$$

$$M_h(x) = \int V(x)\cdot dx$$

$$M_h(x) = \int q\cdot\left(\frac{L}{2} - x\right)\cdot dx$$

$$M(x) = q\cdot\left(\frac{L}{2}x - \frac{1}{2}\cdot x^2\right) + C_M$$

$$M(0) = 0 \quad\rightarrow\quad C_M = 0$$

$$\boldsymbol{M(x) = \frac{1}{2}q\cdot(L\cdot x - x^2)}$$

Ellenőrzés:

$$M(L) = \frac{1}{2}q\cdot(L\cdot L - L^2) = 0$$

A maximális nyomaték:

$$M_{max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot q\cdot\left[L\frac{L}{2} - \frac{L^2}{4}\right]$$

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{8}qL^2$$

$$\beta_h(x) = -\int\frac{M(x)}{E\cdot I}\cdot dx$$

$$\beta_h(x) = -\frac{1}{E\cdot I}\int\frac{1}{2}q\cdot(L\cdot x - x^2)\cdot dx$$

$$\beta(x) = -\frac{1}{2}\frac{q}{E\cdot I}\left(\frac{L}{2}x^2 - \frac{1}{3}q\cdot x^3\right) + C_\beta$$

$$\beta\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{2}\frac{q}{E\cdot I}\left(\frac{L}{2}\cdot\frac{L^2}{4} - \frac{1}{3}q\cdot\frac{L^3}{8}\right) + C_\beta = 0$$

$$C_\beta = \frac{1}{24}\frac{q\cdot L^3}{E\cdot I}$$

$$\boldsymbol{\beta(x) = \frac{1}{24}\frac{q}{E\cdot I}(L^3 - 6\cdot L\cdot x^2 + 4\cdot x^3)}$$

$$\beta(0) = \frac{1}{24}\frac{q\cdot L^3}{E\cdot I} \qquad \beta(L) = -\frac{1}{24}\frac{q\cdot L^3}{E\cdot I}$$

$$e_h(x) = \int\beta(x)\cdot dx$$

$$e_h(x) = \int\frac{1}{24}\frac{q}{E\cdot I}(L^3 - 6\cdot L\cdot x^2 + 4\cdot x^3)\cdot dx$$

$$e(x) = \frac{1}{24}\frac{q}{E\cdot I}(L^3\cdot x - 2\cdot L\cdot x^3 + x^4) + C_e$$

$$e(0) = 0 \quad\rightarrow\quad C_e = 0$$

$$\boldsymbol{e(x) = \frac{1}{24}\frac{q}{E\cdot I}(L^3\cdot x - 2\cdot L\cdot x^3 + x^4)}$$

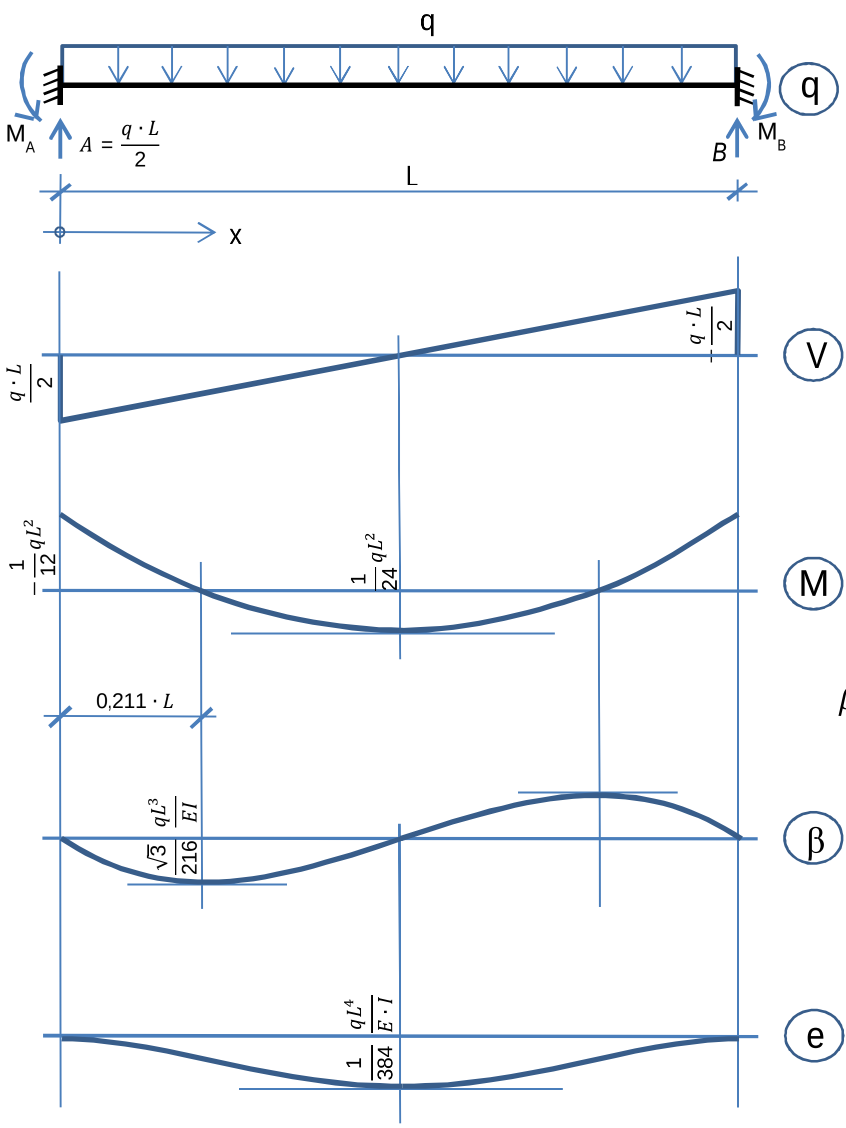
Ellenőrzés: $e(0) = e(L) = 0$

A maximális lehajlás:

$$e\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{24}\frac{q\cdot L^4}{E\cdot I}\left(\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) = \frac{5}{384}\frac{q\cdot L^4}{E\cdot I}$$

$$e_{max} = \frac{5}{384}\frac{q\cdot L^4}{E\cdot I} = \frac{5}{48}\frac{M_{max}\cdot L^2}{E\cdot I}$$

3.2. Mindkét végén befogott tartó konstans megoszló teherrel



$$\boldsymbol{q(x) = q}$$

$$V_h(x) = -\int q(x)\cdot dx$$

$$V_h(x) = -\int q\cdot dx$$

$$V(x) = C_V - q\cdot x$$

$$V(0) = \frac{q\cdot L}{2} \quad \rightarrow \quad C_V = \frac{q\cdot L}{2}$$

$$\boldsymbol{V(x) = q\cdot\left(\frac{L}{2} - x\right)}$$

$$M_h(x) = \int V(x)\cdot dx\, h$$

$$M_h(x) = \int q\cdot\left(\frac{L}{2} - x\right)\cdot dx$$

$$M(x) = q\cdot\left(\frac{L}{2}x - \frac{1}{2}\cdot x^2\right) + C_M$$

$$\beta_h(x) = -\int \frac{M(x)}{E\cdot I}\cdot dx$$

$$\beta_h(x) = -\frac{1}{E\cdot I}\int\left[\frac{1}{2}q\cdot(L\cdot x - x^2) + C_M\right]dx$$

$$\beta(x) = C_\beta - \frac{1}{E\cdot I}\left(C_M x + q\frac{L}{4}x^2 - \frac{1}{6}qx^3\right)$$

$$\beta(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_\beta = 0$$

$$\beta(L) = 0$$

$$-\frac{1}{E\cdot I}\left(C_M L + q\frac{L}{4}L^2 - \frac{1}{6}qL^3\right) = 0$$

$$C_M = -\frac{1}{12}qL^2$$

$$\boldsymbol{M(x) = -\frac{1}{12}qL^2 + \frac{1}{2}q\cdot(Lx - x^2)}$$

$$M^+_{max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{1}{12}qL^2 + \frac{1}{2}q\left[L\frac{L}{2} - \frac{L^2}{4}\right]$$

$$M^+_{max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{24}qL^2$$

Nyomatéki nullpontok:

$$-\frac{1}{12}qL^2 + \frac{1}{2}q\cdot(Lx_0 - x_0^2) = 0$$

$$6x_0^2 - 6Lx_0 + L^2 = 0$$

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)L \quad x_{0,1} = 0{,}211\cdot L$$

$$x_{0,2} = 0{,}789\cdot L$$

A nyomatéki nullpontok távolsága:

$$x_{0,2} - x_{0,1} = \frac{1}{\sqrt{3}}L = 0{,}577\cdot L$$

$$\beta(x) = -\frac{1}{E\cdot I}\left(-\frac{1}{12}qL^2x + q\frac{L}{4}x^2 - \frac{1}{6}qx^3\right)$$

$$\boldsymbol{\beta(x) = \frac{1}{12}\frac{q}{E\cdot I}(L^2x - 3Lx^2 + 2x^3)}$$

Ellenőrzés: $\beta(0) = \beta(L) = 0$

$$\beta\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{12}\frac{q}{E\cdot I}\left(L^2\frac{L}{2} - 3L\frac{L^2}{4} + 2\frac{L^3}{8}\right) = 0$$

$$\beta_{max} = \beta(x_0) = \ldots\ldots = \frac{\sqrt{3}}{216}\frac{q\cdot L^3}{E\cdot I}$$

$$e_h(x) = \int \beta(x)\cdot dx$$

$$e_h(x) = \int \frac{1}{12}\frac{q}{E\cdot I}(L^2x - 3Lx^2 + 2x^3)\cdot dx$$

$$e(x) = \frac{1}{24}\frac{q}{E\cdot I}(L^2x^2 - 2Lx^3 + x^4) + C_e$$

$$e(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_e = 0$$

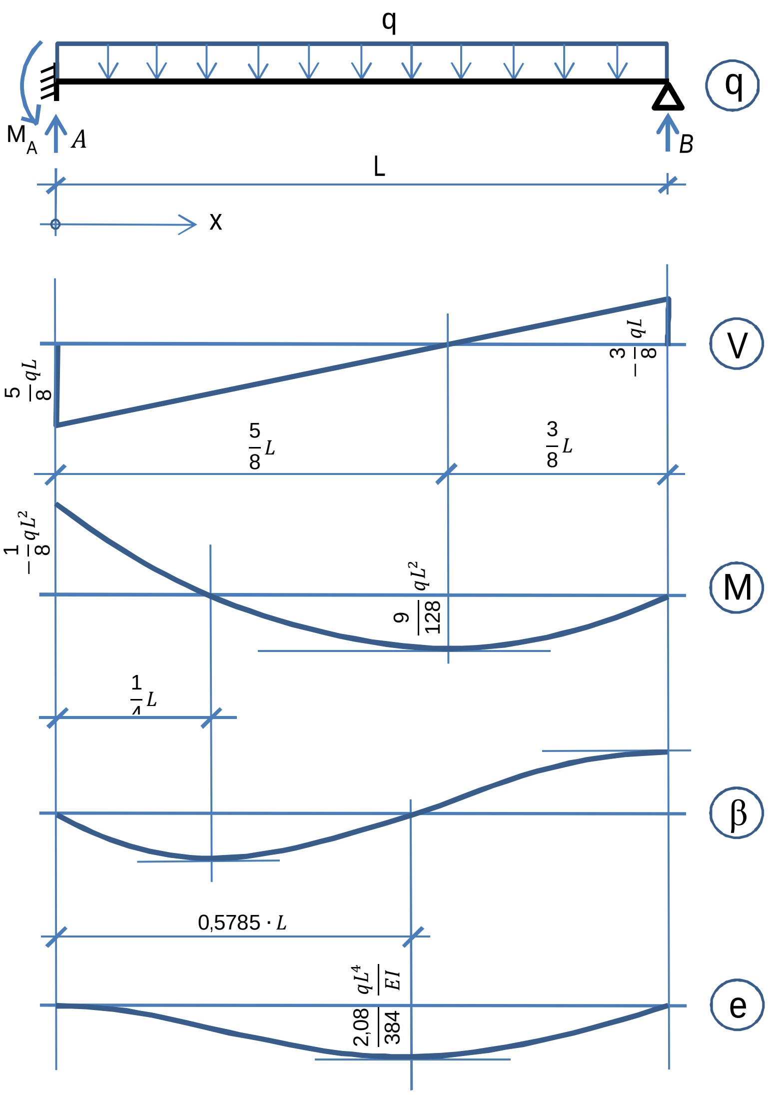
$$\boldsymbol{e(x) = \frac{1}{24}\frac{q}{E\cdot I}(L^2x^2 - 2Lx^3 + x^4)}$$

A maximális lehajlás:

$$e\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{24}\frac{q\cdot L^4}{E\cdot I}\left(\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{384}\frac{q\cdot L^4}{E\cdot I}$$

Ellenőrzés: $e(L) = 0$

3.3. Egyik végén befogott, másik végén csuklós tartó konstans megoszló teherrel



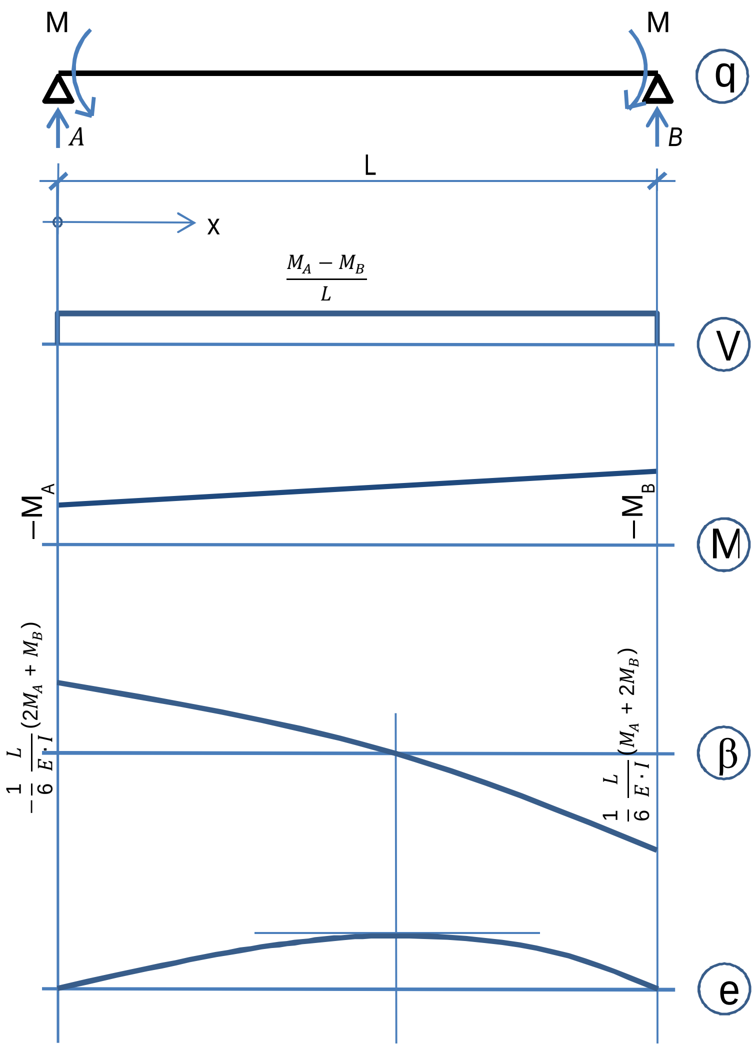
$$\boldsymbol{q(x) = q}$$
$$V_h(x) = -\int q(x) \cdot dx$$
$$V_h(x) = -\int q \cdot dx$$
$$V(x) = C_V - q \cdot x$$
$$M_h(x) = \int V(x) \cdot dx$$
$$M_h(x) = \int (C_V - qx) \cdot dx$$
$$M(x) = C_M + C_V x - \tfrac{1}{2}qx^2$$
$$M(L) = 0$$
$$C_M + C_V L - \tfrac{1}{2}qL^2 = 0$$
$$C_M = \tfrac{1}{2}qL^2 - C_V L$$
$$M(x) = \tfrac{1}{2}qL^2 - C_V L + C_V x - \tfrac{1}{2}qx^2$$

$$\beta_h(x) = -\int \tfrac{M(x)}{E \cdot I} \cdot dx$$
$$\beta_h(x) = -\tfrac{1}{E \cdot I}\int \left[\tfrac{1}{2}qL^2 - C_V L + C_V x - \tfrac{1}{2}qx^2\right] dx$$
$$\beta(x) = C_\beta - \tfrac{1}{E \cdot I}\left(\tfrac{1}{2}qL^2 x - C_V L x + \tfrac{1}{2}C_V x^2 - \tfrac{1}{6}qx^3\right)$$
$$\beta(0) = 0 \rightarrow \quad C_\beta = 0$$
$$e_h(x) = \int \beta(x) \cdot dx$$

$$e_h(x) = \tfrac{1}{E \cdot I}\int \left(C_V L x - \tfrac{1}{2}qL^2 x - \tfrac{1}{2}C_V x^2 + \tfrac{1}{6}qx^3\right) dx$$
$$e(x) = C_e + \tfrac{1}{E \cdot I}\left(\tfrac{1}{2}C_V L x^2 - \tfrac{1}{4}qL^2 x^2 - \tfrac{1}{6}C_V x^3 + \tfrac{1}{24}qx^4\right)$$
$$e(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_e = 0$$
$$e(L) = 0 \quad \rightarrow \quad \tfrac{1}{2}C_V - \tfrac{1}{4}qL - \tfrac{1}{6}C_V + \tfrac{1}{24}qL = 0$$
$$8C_V = 5qL \quad \rightarrow \quad C_V = \tfrac{5}{8}qL$$
$$\boldsymbol{V(x) = \tfrac{5}{8}qL - q \cdot x} \qquad \text{Zérushely:} \quad x_{V,0} = \tfrac{5}{8}L$$
$$C_M = \tfrac{1}{2}qL^2 - C_V L = \tfrac{1}{2}qL^2 - \tfrac{5}{8}qL^2 = -\tfrac{1}{8}qL^2$$
$$\boldsymbol{M(x) = -\tfrac{1}{8}qL^2 + \tfrac{5}{8}qL \cdot x - \tfrac{1}{2}q \cdot x^2}$$
$$M(0) = -\tfrac{1}{8}qL^2$$
$$M^+_{max} = M\left(\tfrac{5}{8}L\right) = -\tfrac{1}{8}qL^2 + \tfrac{15}{28}qL^2 = \tfrac{9}{128}qL^2 = \tfrac{9}{16}M(0)$$
$$\text{Zérushely:} \quad 4x_{M,0}^2 - 5Lx_{M,0} + L^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{M,0} = \tfrac{1}{4}L$$

$$\boldsymbol{\beta(x) = \tfrac{q}{E \cdot I}\left(\tfrac{1}{8}L^2 x - \tfrac{5}{16}Lx^2 + \tfrac{1}{6}x^3\right)}$$
$$\text{Zérushely:} \quad 8x_{\beta,0}^2 - 15Lx_{\beta,0} + 6L^2 = 0$$
$$x_{\beta,0} = \tfrac{15-\sqrt{33}}{16}L = 0{,}5785 \cdot L$$
$$e(x) = \tfrac{q}{E \cdot I}\left(\tfrac{15}{28}L^2x^2 - \tfrac{1}{4}L^2x^2 - \tfrac{15}{68}Lx^3 + \tfrac{1}{24}x^4\right)$$
$$\boldsymbol{e(x) = \tfrac{1}{48}\tfrac{q}{E \cdot I}(3L^2x^2 - 5Lx^3 + 2x^4)}$$
$$\text{Ellenőrzés:} \quad e(L) = 0$$
$$e_{max} = e(x_{\beta,0}) = \tfrac{2{,}07979}{384}\tfrac{qL^4}{E \cdot I} = 0{,}005416\tfrac{qL^4}{E \cdot I}$$

3.4 Kéttámaszú tartó két végén koncentrált nyomatékteherrel



$\boldsymbol{q(x) = 0}$

$V_h(x) = -\int q(x) \cdot dx$

$V_h(x) = -\int 0 \cdot dx$

$V(x) = C_V$

$M_h(x) = \int V(x) \cdot dx$

$M_h(x) = \int C_V \cdot dx$

$M(x) = C_V \cdot x + C_M$

$M(0) = -M_A \quad \rightarrow \quad C_M = -M_A$

$M(L) = -M_B$

$C_V \cdot L - M_A = -M_B \quad \rightarrow \quad C_V = \frac{M_A - M_B}{L}$

$\boldsymbol{V(x) = \frac{M_A - M_B}{L}}$

$\boldsymbol{M(x) = -M_A - \frac{M_B - M_A}{L} x}$

$\beta_h(x) = -\int \frac{M(x)}{E \cdot I} \cdot dx$

$\beta_h(x) = \frac{1}{E \cdot I} \int \left(M_A + \frac{M_B - M_A}{L} x\right) dx$

$\beta(x) = C_\beta + \frac{1}{E \cdot I}\left(M_A x + \frac{M_B - M_A}{L} x^2\right)$

$e_h(x) = \int \beta(x) \cdot dx$

$e_h(x) = \int \left[C_\beta + \frac{1}{E \cdot I}\left(M_A x + \frac{M_B - M_A}{L} x^2\right)\right] \cdot dx$

$e(x) = C_e + C_\beta x + \frac{1}{E \cdot I}\left(\frac{1}{2} M_A x^2 + \frac{1}{6}\frac{M_B - M_A}{L} x^3\right)$

$e(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_e = 0$

$e(L) = 0 \quad \rightarrow \quad C_\beta = -\frac{1}{6}\frac{L}{E \cdot I}(2M_A + M_B)$

$\boldsymbol{\beta(x) = \frac{1}{E \cdot I}\left(-\frac{1}{3} M_A L - \frac{1}{6} M_B L + M_A x + \frac{M_B - M_A}{L} x^2\right)}$

Zérushely: $\beta(x_0) = 0$

$(M_B - M_A) x_{\beta,0}^2 + 2 L M_A x_{\beta,0} - \frac{2}{3} L^2 M_A - \frac{1}{3} L^2 M_B = 0$

$x_{\beta,0} = \frac{-M_A + \sqrt{\frac{1}{3} M_A^2 + \frac{1}{3} M_A M_B + \frac{1}{3} M_B^2}}{M_B - M_A} L$

$\boldsymbol{e(x) = \frac{1}{E \cdot I}\left(-\frac{1}{3} M_A L x - \frac{1}{6} M_B L x + \frac{1}{2} M_A x^2 + \frac{1}{6}\frac{M_B - M_A}{L} x^3\right)}$

Ellenőrzés: $e(0) = 0$

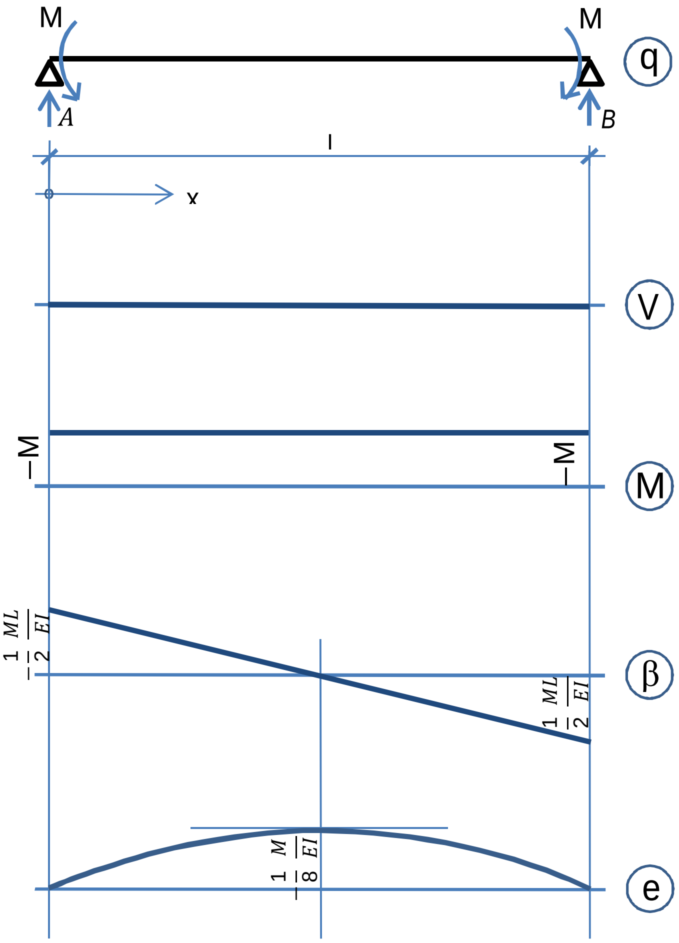
$e(L) = \frac{1}{E \cdot I}\left[-\frac{1}{3} M_A - \frac{1}{6} M_B + \frac{1}{2} M_A + \frac{1}{6}(M_B - M_A)\right] = 0$

Maximális alakváltozás:

$e_{|max|} = e(x_{\beta,0})$

Speciális esetek:

A két végnyomaték egyenlő



$$\boldsymbol{q(x) = 0}$$

$$\boldsymbol{V(x) = 0}$$

$$\boldsymbol{M(x) = -M}$$

$$\boldsymbol{\beta(x) = \frac{M}{E\cdot I}\left(x - \frac{1}{2}L\right)}$$

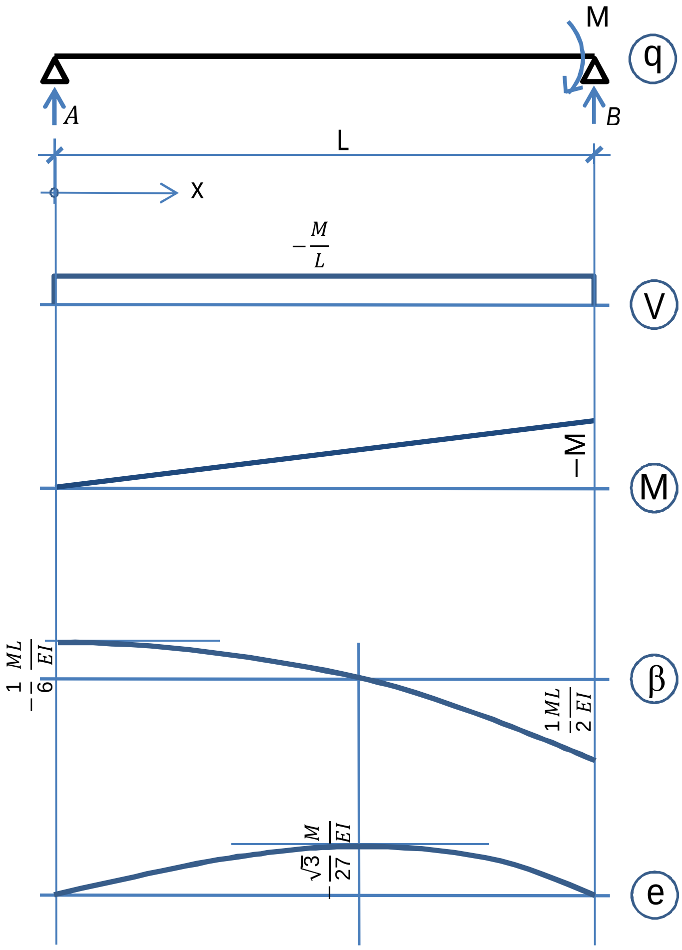
$$\beta(0) = -\frac{1}{2}\frac{ML}{E\cdot I} \qquad \beta(L) = \frac{1}{2}\frac{ML}{E\cdot I}$$

Zérushely: $x_{\beta,0} = \frac{1}{2}L$

$$\boldsymbol{e(x) = \frac{1}{2}\frac{M}{E\cdot I}\left(\frac{1}{L}x^2 - Lx\right)}$$

$$e_{|max|} = e\left(\frac{1}{2}L\right) = -\frac{1}{8}\frac{M}{E\cdot I}$$

Csak az egyik végen működik nyomatékteher



$$\boldsymbol{q(x) = 0}$$

$$\boldsymbol{V(x) = -\frac{M}{L}}$$

$$\boldsymbol{M(x) = -\frac{M}{L}x}$$

$$\boldsymbol{\beta(x) = \frac{M}{E\cdot I}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{L}x^2 - \frac{1}{6}L\right)}$$

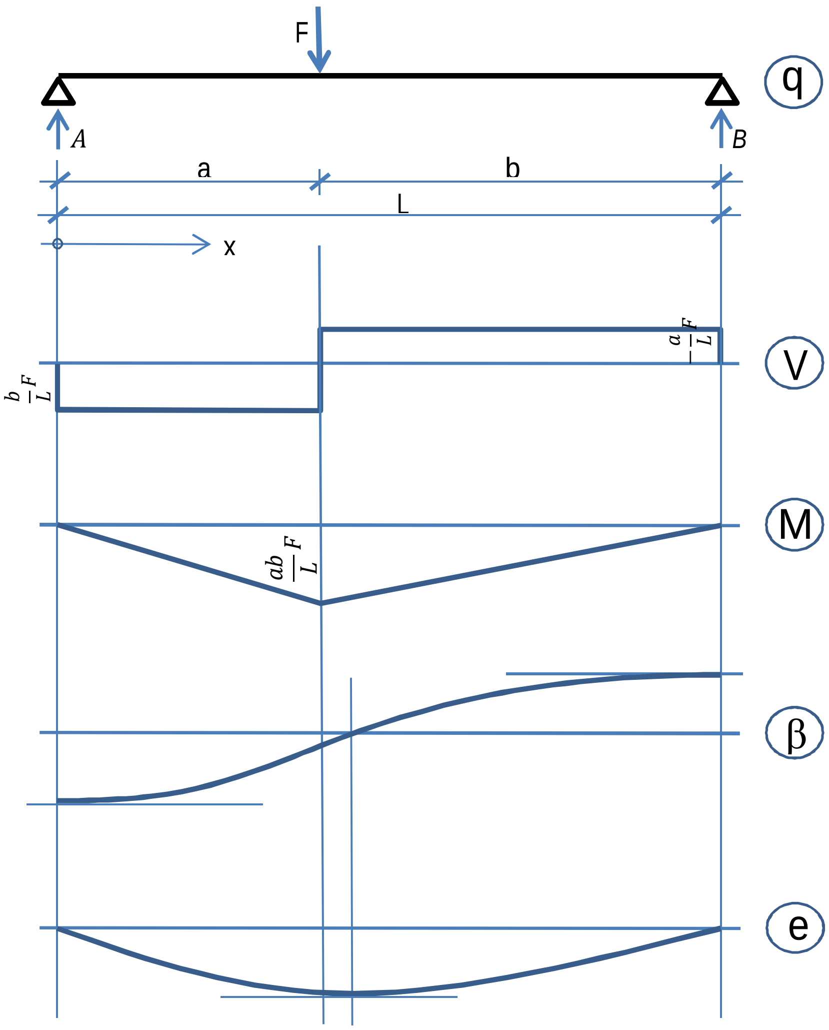
$$\beta(0) = -\frac{1}{6}\frac{ML}{E\cdot I} \qquad \beta(L) = \frac{1}{2}\frac{ML}{E\cdot I}$$

Zérushely: $x_{\beta,0} = \frac{1}{\sqrt{3}}L$

$$\boldsymbol{e(x) = \frac{1}{6}\frac{M}{E\cdot I}\left(\frac{1}{L}x^3 - Lx\right)}$$

$$e_{|max|} = e\left(\frac{1}{\sqrt{3}}L\right) = -\frac{\sqrt{3}}{27}\frac{M}{E\cdot I}$$

3.5. Kéttámaszú tartó koncentrált teherrel



$$q(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le a \\ 0 & a \le x \le L \end{cases}$$

$$V_h(x) = \begin{cases} -\int q(x) \cdot dx & 0 \le x \le a \\ -\int q(x) \cdot dx & a \le x \le L \end{cases}$$

$$V_h(x) = \begin{cases} -\int 0 \cdot dx & 0 \le x \le a \\ -\int 0 \cdot dx & a \le x \le L \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} C_{V1} & 0 \le x \le a \\ C_{V2} & a \le x \le L \end{cases}$$

$$V(0) = \frac{b}{L}F \quad \rightarrow \quad C_{V1} = \frac{b}{L}F$$

$$V(L) = -\frac{a}{L}F \rightarrow \quad C_{V1} = -\frac{a}{L}F$$

$$\boldsymbol{V(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{\frac{b}{L}F} & \boldsymbol{0 \le x \le a} \\ \boldsymbol{-\frac{a}{L}F} & \boldsymbol{a \le x \le L} \end{cases}$$

$$M_h(x) = \begin{cases} \int V(x) \cdot dx & 0 \le x \le a \\ \int V(x) \cdot dx & a \le x \le L \end{cases}$$

$$M_h(x) = \begin{cases} \int \frac{b}{L}F \cdot dx & 0 \le x \le a \\ \int -\frac{a}{L}F \cdot dx & a \le x \le L \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} \frac{b}{L}F \cdot x + C_{M1} & 0 \le x \le a \\ -\frac{a}{L}F \cdot x + C_{M2} & a \le x \le L \end{cases}$$

$$M(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_{M1} = 0$$

$$M(L) = 0 \quad \rightarrow \quad C_{M2} = aF$$

$$\boldsymbol{M(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{\frac{b}{L}F \cdot x} & \boldsymbol{0 \le x \le a} \\ \boldsymbol{aF - \frac{a}{L}F \cdot x} & \boldsymbol{a \le x \le L} \end{cases}$$

$$M_{max} = M(a) = \frac{ab}{L}F$$

$$\beta_h(x) = \begin{cases} -\int \frac{M(x)}{E \cdot I} \cdot dx & 0 \le x \le a \\ -\int \frac{M(x)}{E \cdot I} \cdot dx & a \le x \le L \end{cases}$$

$$\beta_h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{E \cdot I} \int \frac{b}{L}F \cdot x \cdot dx & 0 \le x \le a \\ -\frac{1}{E \cdot I} \int \left(aF - \frac{a}{L}F \cdot x\right) \cdot dx & a \le x \le L \end{cases}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} -\frac{F}{E \cdot I}\frac{1}{2}\frac{b}{L}x^2 + C_{\beta 1} & 0 \le x \le a \\ \frac{aF}{E \cdot I}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{L}x^2 - x\right) + C_{\beta 2} & a \le x \le L \end{cases}$$

Az elfordulás-függvénynek nincs szakadása:

$$-\frac{a^2F}{EI}\frac{1}{2}\frac{b}{L} + C_{\beta 1} = \frac{a^2F}{EI}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{L}a - 1\right) + C_{\beta 2}$$

$$\frac{a^2F}{EI}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{b}{L} - \frac{1}{2}\frac{a}{L}\right) + C_{\beta 1} = C_{\beta 2} \quad \rightarrow \quad C_{\beta 2} = C_{\beta 1} + \frac{1}{2}\frac{a^2F}{EI}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} -\frac{F}{E \cdot I}\frac{1}{2}\frac{b}{L}x^2 + C_{\beta 1} & 0 \le x \le a \\ \frac{aF}{E \cdot I}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{L}x^2 - x + \frac{a}{2}\right) + C_{\beta 1} & a \le x \le L \end{cases}$$

$$e_h(x) = \begin{cases} \int \beta(x) \cdot dx & 0 \le x \le a \\ \int \beta(x) \cdot dx & a \le x \le L \end{cases}$$

$$e_h(x) = \begin{cases} \int \left(-\frac{1}{E \cdot I}\frac{1}{2}\frac{b}{L}Fx^2 + C_{\beta 1}\right) \cdot dx & 0 \le x \le a \\ \int \left[\frac{aF}{E \cdot I}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{L}x^2 - x + \frac{a}{2}\right) + C_{\beta 1}\right] \cdot dx & a \le x \le L \end{cases}$$

$$e(x) = \begin{cases} -\frac{F}{E \cdot I}\frac{1}{6}\frac{b}{L}x^3 + C_{\beta 1}x + C_{e1} & 0 \le x \le a \\ \frac{aF}{E \cdot I}\left(\frac{1}{6}\frac{1}{L}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{a}{2}x\right) + C_{\beta 1}x + C_{e2} & a \le x \le L \end{cases} \qquad e(0) = 0 \rightarrow \; C_{e1} = 0$$

A lehajlás-függvénynek nincs szakadása:

$$-\frac{F}{E \cdot I}\frac{1}{6}\frac{b}{L}a^3 = \frac{aF}{E \cdot I}\left(\frac{1}{6}\frac{1}{L}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{a}{2}a\right) + C_{e2}$$

$$C_{e2} = -\frac{Fa^2}{E \cdot I}\left(\frac{1}{6}\frac{b}{L}a + \frac{1}{6}\frac{a}{L}a\right) = -\frac{1}{6}\frac{Fa^3}{E \cdot I}$$

$$e(L) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{aF}{E \cdot I}\left(\frac{1}{6}\frac{1}{L}L^3 - \frac{1}{2}L^2 + \frac{a}{2}L\right) + C_{\beta 1}L - \frac{1}{6}\frac{Fa^3}{E \cdot I} = 0$$

$$\frac{F}{E \cdot I}\left(-\frac{1}{3}aL + \frac{1}{2}a^2\right) + C_{\beta 1} = \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{1}{6}\frac{a^3}{L}\right)$$

$$C_{\beta 1} = \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{1}{6}\frac{a^3}{L} - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}aL\right)$$

$$\boldsymbol{\beta(x) = \frac{F}{E \cdot I}\begin{cases} -\frac{1}{2}\frac{b}{L}x^2 + \left(\frac{1}{6}\frac{a^2}{L} + \frac{1}{3}L - \frac{1}{2}a\right)a & 0 \le x \le a \\ \frac{1}{2}\frac{a}{L}x^2 - ax + \left(\frac{1}{6}\frac{a^2}{L} + \frac{1}{3}L\right)a & a \le x \le L \end{cases}}$$

$$e(x) = \frac{F}{E \cdot I}\begin{cases} -\frac{1}{6}\frac{b}{L}x^3 + \left(\frac{1}{6}\frac{a^3}{L} - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}aL\right)ax & 0 \le x \le a \\ \frac{1}{6}\frac{a}{L}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{a^2}{2}x + \left(\frac{1}{6}\frac{a^3}{L} - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}aL\right)x - \frac{1}{6}a^3 & a \le x \le L \end{cases}$$

$$\boldsymbol{e(x) = \frac{F}{E \cdot I}\begin{cases} -\frac{1}{6}\frac{b}{L}x^3 + \left(\frac{1}{6}\frac{a^2}{L} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}L\right)ax & 0 \le x \le a \\ \frac{1}{6}\frac{a}{L}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + \left(\frac{1}{6}\frac{a^2}{L} + \frac{1}{3}L\right)ax - \frac{1}{6}a^3 & a \le x \le L \end{cases}}$$

$$e(a) = \frac{F}{E \cdot I}\left(-\frac{1}{6}\frac{L-a}{L}a + \frac{1}{6}\frac{a^2}{L} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}L\right)a^2 = \frac{F}{E \cdot I}\left(-\frac{1}{6}\frac{L-a}{L}a + \frac{1}{3}\frac{L^2}{L} - \frac{1}{3}\frac{a^2}{L}\right)a^2$$

$$e(a) = \frac{F}{E \cdot I}\frac{1}{3}\frac{a^2}{L}[-2(L-a)a + (L+a)(L-a)] = \frac{F}{E \cdot I}\frac{1}{3}\frac{a^2}{L}(L-a)(L+a-2a) = \frac{1}{3}\frac{a^2b^2}{L}\frac{F}{E \cdot I}$$

A maximális lehajlás a tehertől a távolabbik támasz felé esik: $\beta\left(x_{\beta,0}\right) = 0$

$$\frac{1}{2}\frac{a}{L}x_{\beta,0}^2 - ax_{\beta,0} + \left(\frac{1}{6}\frac{a^2}{L} + \frac{1}{3}L\right)a = 0$$

$$x_{\beta,0} = L - \sqrt{\frac{1}{3}(L^2 - a^2)}$$

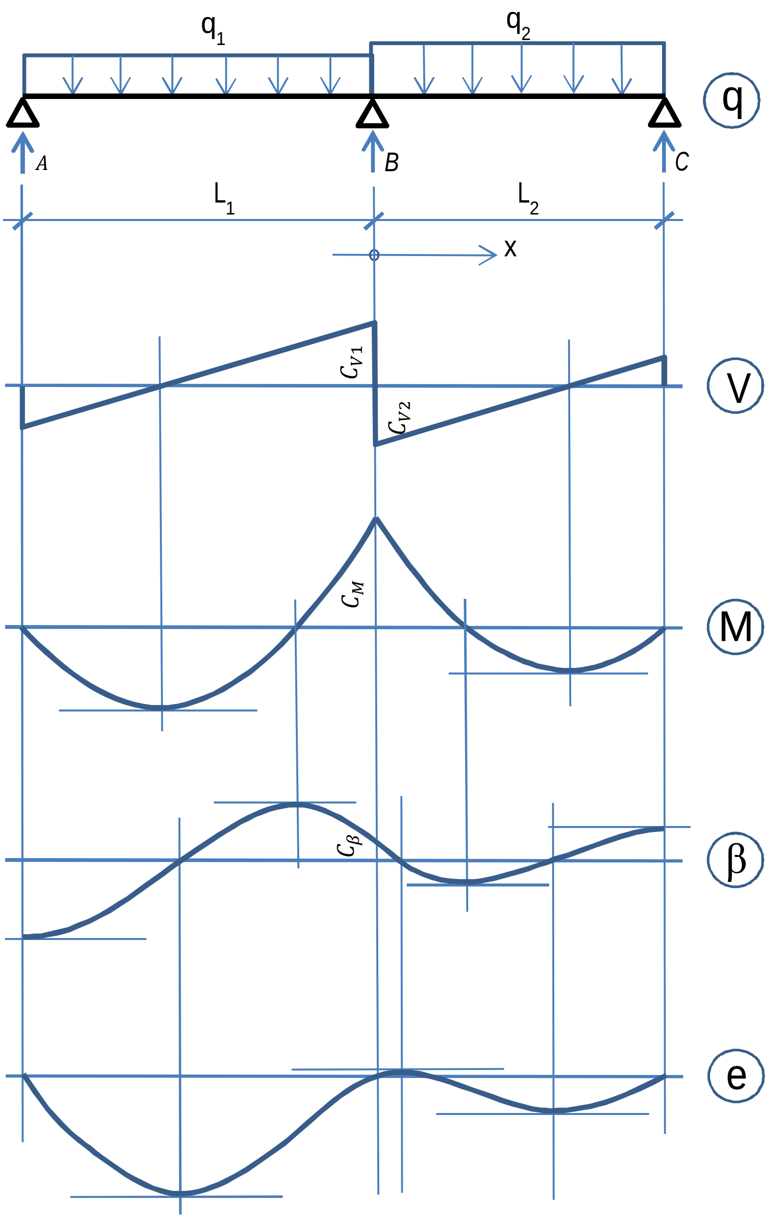
$$e_{max} = e\left(x_{\beta,0}\right) = \frac{\sqrt{3}}{27}\frac{a}{L}\sqrt{L^2 - a^2}^3\,\frac{F}{EI}$$

Speciális eset: $\boldsymbol{a = b = \frac{L}{2}}$

$$\beta(x) = \frac{F}{E \cdot I}\begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}L^2 & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}Lx + \frac{3}{16}L^2 & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases} \qquad \beta(0) = \frac{1}{16}\frac{FL^2}{E \cdot I} \qquad \beta(L) = -\frac{1}{16}\frac{FL^2}{E \cdot I}$$

$$e(x) = \frac{F}{E \cdot I}\begin{cases} -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{16}L^2x & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}Lx^2 + \frac{3}{16}L^2x - \frac{1}{48}L^3 & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases} \qquad e_{max} = e\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{48}\frac{FL^3}{EI}$$

3.6. Három támaszú tartó mezőnként konstans megoszló teherrel



$$q(x) = \begin{cases} q_1 & -L_1 \le x \le 0 \\ q_2 & 0 \le x \le L_2 \end{cases}$$

$$V_h(x) = \begin{cases} -\int q_1(x)\cdot dx & -L_1 \le x \le 0 \\ -\int q_2(x)\cdot dx & 0 \le x \le L_2 \end{cases}$$

$$V_h(x) = \begin{cases} -\int q_1\cdot dx & -L_1 \le x \le 0 \\ -\int q_2\cdot dx & 0 \le x \le L_2 \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} C_{V1} - q_1 x & -L_1 \le x \le 0 \\ C_{V2} - q_2 x & 0 \le x \le L_2 \end{cases}$$

$$M_h(x) = \begin{cases} \int V_1(x)\cdot dx & -L_1 \le x \le 0 \\ \int V_2(x)\cdot dx & 0 \le x \le L_2 \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} C_{M1} + C_{V1}x - \frac{1}{2}q_1x^2 & -L_1 \le x \le 0 \\ C_{M2} + C_{V2}x - \frac{1}{2}q_2x^2 & 0 \le x \le L_2 \end{cases}$$

$$M(0) = C_{M1} = C_{M2} = C_M$$

$$M(-L_1) = 0 \;\rightarrow\; C_{V1} = -\frac{1}{2}q_1L_1 + \frac{C_M}{L_1}$$

$$M(L_2) = 0 \;\rightarrow\; C_{V2} = \frac{1}{2}q_2L_2 - \frac{C_M}{L_2}$$

$$\beta_h(x) = \begin{cases} -\int \frac{M(x)}{E\cdot I}\cdot dx & -L_1 \le x \le 0 \\ -\int \frac{M(x)}{E\cdot I}\cdot dx & 0 \le x \le L_2 \end{cases}$$

$$\beta_h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{EI}\int\left(C_M + C_{V1}x - \frac{1}{2}q_1x^2\right)dx & -L_1 \le x \le 0 \\ -\frac{1}{EI}\int\left(C_M + C_{V2}x - \frac{1}{2}q_2x^2\right)dx & 0 \le x \le L_2 \end{cases}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} C_{\beta1} - \frac{1}{EI}\left(C_Mx + \frac{1}{2}C_{V1}x^2 - \frac{1}{6}q_1x^3\right) & -L_1 \le x \le 0 \\ C_{\beta2} - \frac{1}{EI}\left(C_Mx + \frac{1}{2}C_{V2}x^2 - \frac{1}{6}q_2x^3\right) & 0 \le x \le L_2 \end{cases}$$

$$\beta(0) = C_{\beta1} = C_{\beta2} = C_\beta$$

$$e_h(x) = \begin{cases} \int \beta(x)\cdot dx & -L_1 \le x \le 0 \\ \int \beta(x)\cdot dx & 0 \le x \le L_2 \end{cases}$$

$$e_h(x) = \begin{cases} \int\left[C_\beta - \frac{1}{EI}\left(C_Mx + \frac{1}{2}C_{V1}x^2 - \frac{1}{6}q_1x^3\right)\right]dx & -L_1 \le x \le 0 \\ \int\left[C_\beta - \frac{1}{EI}\left(C_Mx + \frac{1}{2}C_{V2}x^2 - \frac{1}{6}q_2x^3\right)\right]dx & 0 \le x \le L_2 \end{cases}$$

$$e(x) = \begin{cases} C_{e1} + C_\beta x + \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}q_1x^4 - \frac{1}{6}C_{V1}x^3 - \frac{1}{2}C_Mx^2\right) & -L_1 \le x \le 0 \\ C_{e2} + C_\beta x + \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}q_2x^4 - \frac{1}{6}C_{V2}x^3 - \frac{1}{2}C_Mx^2\right) & 0 \le x \le L_2 \end{cases}$$

$$e(0) = C_{e1} = C_{e2} = 0$$

$$\begin{cases} e(-L_1) = 0 \\ e(L_2) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -C_\beta L_1 + \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{24}q_1L_1^4 + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}q_1L_1 + \frac{C_M}{L_1}\right)L_1^3 - \frac{1}{2}C_ML_1^2\right] = 0 \\ -C_\beta L_2 + \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{24}q_2L_2^4 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}q_2L_2 - \frac{C_M}{L_2}\right)L_2^3 - \frac{1}{2}C_ML_2^2\right] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_\beta L_1 + \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{24}q_1L_1^4 - \frac{1}{3}C_ML_1^2\right) = 0 \\ C_\beta L_2 + \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{24}q_2L_2^4 - \frac{1}{3}C_ML_2^2\right) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -C_\beta + \frac{L_1}{EI}\left(-\frac{1}{24}q_1L_1^2 - \frac{1}{3}C_M\right) = 0 \\ C_\beta + \frac{L_2}{EI}\left(-\frac{1}{24}q_2L_2^2 - \frac{1}{3}C_M\right) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{L_1}{EI}\left(-\frac{1}{24}q_1L_1^2 - \frac{1}{3}C_M\right) + \frac{L_2}{EI}\left(-\frac{1}{24}q_2L_2^2 - \frac{1}{3}C_M\right) = 0$$

$$\boldsymbol{C_M = -\frac{1}{8}\cdot\frac{q_1L_1^3 + q_2L_2^3}{L_1 + L_2}} \qquad C_\beta = \frac{L_1}{EI}\left(-\frac{1}{24}q_1L_1^2 - \frac{1}{3}C_M\right) = \frac{L_1}{EI}\left(-\frac{1}{24}q_1L_1^2 + \frac{1}{24}\frac{q_1L_1^3 + q_2L_2^3}{L_1 + L_2}\right)$$

$$C_\beta = \frac{L_1}{EI}\frac{1}{24}\frac{-q_1L_1^2L_2 + q_2L_2^3}{L_1 + L_2}$$

$$\boldsymbol{C_\beta = \frac{1}{24}\cdot\frac{L_1L_2}{EI}\cdot\frac{q_2L_2^2 - q_1L_1^2}{L_1 + L_2}}$$

$$C_{V1} = -\frac{1}{2}q_1L_1 + \frac{C_M}{L_1} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{C_{V1} = -\frac{1}{2}q_1L_1 - \frac{1}{8}\cdot\frac{q_1L_1^3 + q_2L_2^3}{L_1(L_1 + L_2)}}$$

$$C_{V2} = \frac{1}{2}q_2L_2 - \frac{C_M}{L_2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{C_{V2} = \frac{1}{2}q_2L_2 + \frac{1}{8}\cdot\frac{q_1L_1^3 + q_2L_2^3}{L_2(L_1 + L_2)}}$$

Összefoglalva a függvények:

$$q(x) = \begin{cases} q_1 & -L_1 \le x \le 0 \\ q_2 & 0 \le x \le L_2 \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} C_{V1} - x & -L_1 \le x \le 0 \\ C_{V2} - q_2x & 0 \le x \le L_2 \end{cases} \qquad x_{V0,1} = \frac{C_{V1}}{q_1}$$

$$M(x) = \begin{cases} +C_{V1}x - \frac{1}{2}x^2 & -L_1 \le x \le 0 \\ C_M + C_{V2}x - \frac{1}{2}q_2x^2 & 0 \le x \le L_2 \end{cases} \qquad M_{max1} = C_M + \frac{1}{2}\frac{C_{V1}^2}{q_1}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} C_\beta - \frac{1}{EI}\left(C_Mx + \frac{1}{2}C_{V1}x^2 - \frac{1}{6}q_1x^3\right) & -L_1 \le x \le 0 \\ C_\beta - \frac{1}{EI}\left(C_Mx + \frac{1}{2}C_{V2}x^2 - \frac{1}{6}q_2x^3\right) & 0 \le x \le L_2 \end{cases}$$

$$e(x) = \begin{cases} C_\beta x + \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}q_1x^4 - \frac{1}{6}C_{V1}x^3 - \frac{1}{2}C_Mx^2\right) & -L_1 \le x \le 0 \\ C_\beta x + \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}q_2x^4 - \frac{1}{6}C_{V2}x^3 - \frac{1}{2}C_Mx^2\right) & 0 \le x \le L_2 \end{cases}$$

A konstansokat nem érdemes behelyettesíteni, mert a kifejezések túl bonyolultak lennének. A képleteket beprogramozva, pl. MathCad-be vagy Excelbe, a konkrét adatok birtokában a függvények együtthatói könnyen előállíthatók, a zérushelyek a 2. fokú egyenlet és a 3. fokú egyenlet megoldóképletével kiszámíthatók, innen pedig a szélsőértékek behelyettesítéssel meghatározhatók.

Speciális eset: $\boldsymbol{L_1 = L_2 = L}$ **és** $\boldsymbol{q_1 = q_2 = q}$

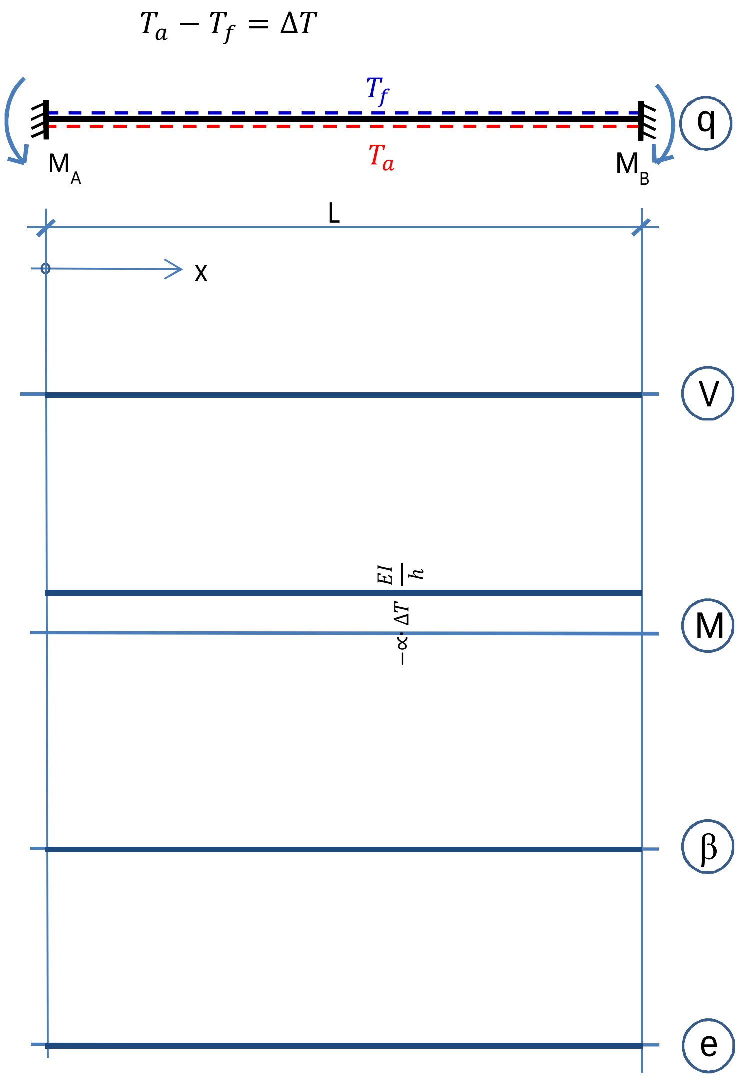
Az elfordulás a középső támasznál: $C_\beta = 0$

A hajlítónyomaték a középső támasznál: $C_M = -\frac{1}{8}qL^2$

A nyíróerő a középső támasznál: $C_V = \frac{5}{8}qL$

A tartó jobb oldala megegyezik az egyik oldalon befogott, másik oldalon csuklós tartóval.

3.7. Két végén befogott tartó egyenlőtlen hőmérséklet-változási teherrel



$\boldsymbol{q(x) = 0}$

$V_h(x) = -\int q(x) \cdot dx$

$V_h(x) = -\int 0 \cdot dx$

$V(x) = C_V$

$V(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_V = 0$

$\boldsymbol{V(x) = 0}$

$M_h(x) = \int V(x) \cdot dx$

$M_h(x) = \int 0 \cdot dx$

$M(x) = C_M$

$\beta(x) = \beta_S(x) + \beta_T(x)$

$\beta_h(x) = -\int \frac{M(x)}{E \cdot I} \cdot dx - \int \frac{\alpha \cdot \Delta T}{h} \cdot dx$

$\beta(x) = -\frac{1}{EI} C_M x - \frac{\alpha \cdot \Delta T}{h} x + C_\beta$

$\beta(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_{\beta,T} = 0$

$\beta(L) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{EI} C_M L + \frac{\alpha \cdot \Delta T}{h} L = 0$

$C_M = -\frac{\alpha \cdot \Delta T}{h}$

$\boldsymbol{M(x) = -\frac{\alpha \cdot \Delta T}{h}}$

$\beta(x) = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{\alpha \cdot \Delta T}{h}\right) x - \frac{\alpha \cdot \Delta T}{h} x + 0$

$\boldsymbol{\beta(x) = 0}$

$e_h(x) = \int \beta(x) \cdot dx$

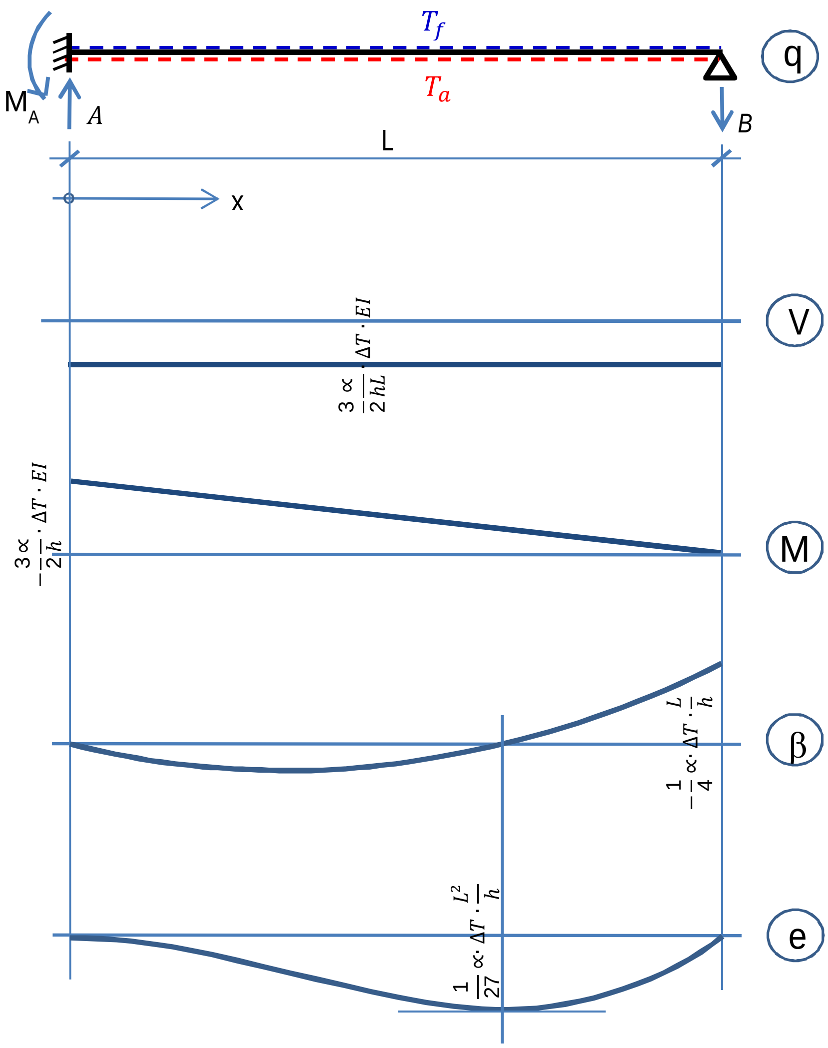
$e(x) = C_e$

$e(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_e = 0$

$\boldsymbol{e(x) = 0}$

3.8. Egyik végén befogott tartó egyenlőtlen hőmérséklet-változási teherrel

$T_a - T_f = \Delta T$



$$\boldsymbol{q(x) = 0}$$
$$V_h(x) = -\int q(x)\cdot dx$$
$$V_h(x) = -\int 0\cdot dx$$
$$V(x) = C_V$$
$$M_h(x) = \int V(x)\cdot dx$$
$$M_h(x) = \int C_V\cdot dx$$
$$M(x) = C_V x + C_M$$
$$M(L) = 0 \quad \rightarrow \quad C_M = -C_V L$$
$$M(x) = C_V x - C_V L$$
$$\beta(x) = \beta_S(x) + \beta_T(x)$$
$$\beta_h(x) = -\int\frac{M(x)}{E\cdot I}\cdot dx - \int\frac{\alpha\cdot\Delta T}{h}\cdot dx$$
$$\beta(x) = \frac{C_V}{EI}\left(-\frac{1}{2}x^2 + Lx\right) - \frac{\alpha\cdot\Delta T}{h}x + C_\beta$$
$$\beta(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_\beta = 0$$
$$e_h(x) = \int\beta(x)\cdot dx$$
$$e_h(x) = \int\left[\frac{C_V}{EI}\left(-\frac{1}{2}x^2 + Lx\right) - \frac{\alpha\cdot\Delta T}{h}x\right]dx$$
$$e(x) = \frac{C_V}{EI}\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}Lx^2\right) - \frac{1}{2}\frac{\alpha\cdot\Delta T}{h}x^2 + C_e$$
$$e(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_e = 0$$
$$e(L) = 0$$
$$\frac{C_V}{EI}\left(-\frac{1}{6}L^3 + \frac{1}{2}LL^2\right) - \frac{1}{2}\frac{\alpha\cdot\Delta T}{h}L^2 = 0$$
$$C_V = \frac{3}{2}\frac{\alpha\cdot\Delta T}{hL}EI$$

$$\boldsymbol{V(x) = \frac{3}{2}\frac{\alpha\cdot\Delta T}{h\cdot L}EI}$$
$$\boldsymbol{M(x) = \frac{3}{2}\frac{\alpha\cdot\Delta T}{h\cdot L}EI(x-L)}$$
$$M(0) = -\frac{3}{2}\frac{\alpha\cdot\Delta T}{h}EI \qquad M(L) = 0$$
$$\beta(x) = \frac{3}{2}\frac{\alpha\cdot\Delta T}{h\cdot L}\left(-\frac{1}{2}x^2 + Lx\right) - \frac{\alpha\cdot\Delta T}{h}x$$
$$\boldsymbol{\beta(x) = \frac{1}{4}\frac{\alpha\cdot\Delta T}{h\cdot L}(-3x^2 + 2Lx)}$$
$$\beta(0) = 0 \qquad \beta(L) = -\frac{1}{4}\alpha\cdot\Delta T\cdot\frac{L}{h}$$

Zérushely:

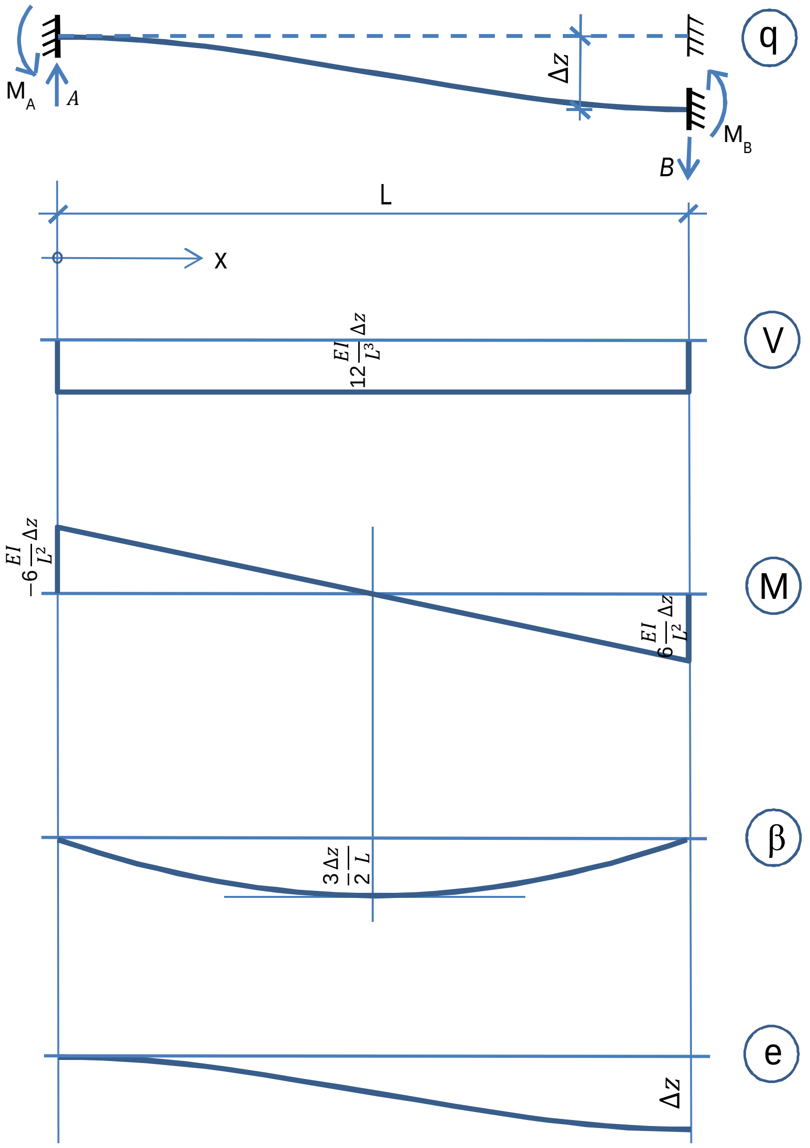
$$\frac{1}{4}\frac{\alpha\cdot\Delta T}{h\cdot L}(-3x_{\beta 0}^2 + 2Lx_{\beta 0}) = 0 \quad \rightarrow \quad x_{\beta 0} = \frac{2}{3}L$$

$$e(x) = \frac{C_V}{EI}\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}Lx^2\right) - \frac{1}{2}\frac{\alpha\cdot\Delta T}{h}x^2$$
$$e(x) = \frac{3}{2}\frac{\alpha\cdot\Delta T}{hL}\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}Lx^2\right) - \frac{1}{2}\frac{\alpha\cdot\Delta T}{h}x^2$$
$$\boldsymbol{e(x) = \frac{1}{4}\frac{\alpha\cdot\Delta T}{hL}(-x^3 + Lx^2)}$$

Ellenőrzés: $e(0) = e(L) = 0$

$$e_{max} = e(x_{\beta 0})$$
$$e_{max} = \frac{1}{4}\frac{\alpha\cdot\Delta T}{hL}\left[-\left(\frac{2}{3}L\right)^3 + L\left(\frac{2}{3}L\right)^2\right]$$
$$e_{max} = \frac{1}{27}\alpha\cdot\Delta T\frac{L^2}{h}$$

3.9. Két végén befogott tartó támaszsüllyedése



$$\boldsymbol{q(x) = 0}$$

$$V_h(x) = -\int q(x) \cdot dx$$

$$V_h(x) = -\int 0 \cdot dx$$

$$V(x) = C_V$$

$$M_h(x) = \int V(x) \cdot dx$$

$$M_h(x) = \int C_V \cdot dx$$

$$M(x) = C_V x + C_M$$

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad C_M = -\frac{1}{2} C_V L$$

$$\beta_h(x) = -\int \frac{M(x)}{E \cdot I} \cdot dx$$

$$\beta_h(x) = -\frac{1}{E \cdot I} \int \left(C_V x - \frac{1}{2} C_V L\right) \cdot dx$$

$$\beta(x) = \frac{C_V}{E \cdot I}\left(\frac{1}{2} L x - \frac{1}{2} x^2\right) + C_\beta$$

$$\beta(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_\beta = 0$$

$$\beta(x) = \frac{1}{2}\frac{C_V}{E \cdot I}(Lx - x^2)$$

$$e_h(x) = \int \beta(x) \cdot dx$$

$$e_h(x) = \int \frac{1}{2}\frac{C_V}{E \cdot I}(Lx - x^2) \cdot dx$$

$$e(x) = \frac{1}{2}\frac{C_V}{E \cdot I}\left(\frac{1}{2} L x^2 - \frac{1}{3} x^3\right) + C_e$$

$$e(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_e = 0$$

$$e(L) = \Delta z$$

$$\frac{1}{12}\frac{C_V}{E \cdot I} L^3 = \Delta z$$

$$C_V = 12 \frac{EI}{L^3} \Delta z \quad \rightarrow \quad C_M = -6 \frac{EI}{L^2} \Delta z$$

$$\boldsymbol{V(x) = 12 \frac{EI}{L^3} \Delta z}$$

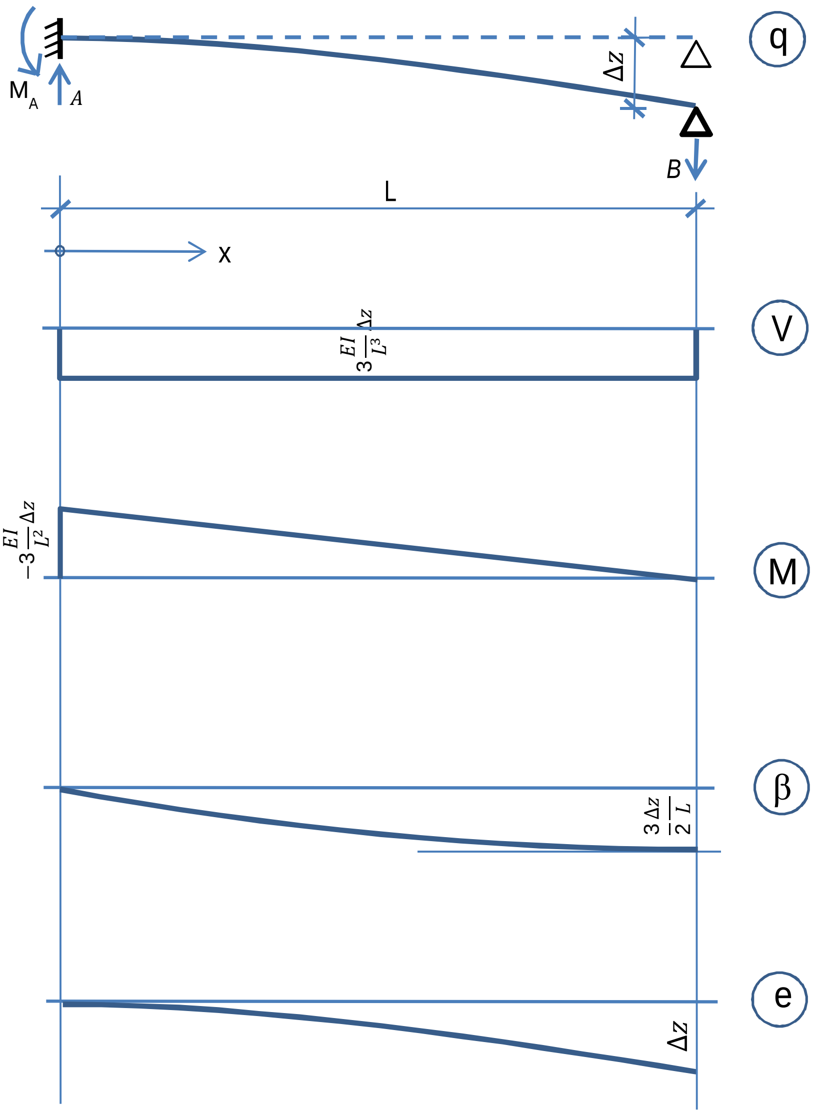
$$M(x) = 6 \frac{EI}{L^3} \Delta z \cdot x - 6 \frac{EI}{L^2} \Delta z$$

$$\boldsymbol{M(x) = 6 \frac{EI}{L^3} \Delta z \cdot (2x - L)} \qquad M(0) = -6 \frac{EI}{L^2} \Delta z \qquad M(L) = 6 \frac{EI}{L^2} \Delta z$$

$$\boldsymbol{\beta(x) = 6 \frac{\Delta z}{L^3} (Lx - x^2)} \qquad \beta(0) = \beta(L) = 0 \qquad \beta_{max} = \beta\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{\Delta z}{L}$$

$$\boldsymbol{e(x) = 6 \frac{\Delta z}{L^3}\left(\frac{1}{2} L x^2 - \frac{1}{3} x^3\right)} \qquad e(0) = 0 \qquad e(L) = \Delta z$$

3.10. Egyik végén befogott tartó támaszsüllyedése



$$\boldsymbol{q(x) = 0}$$

$$V_h(x) = -\int q(x)\cdot dx$$

$$V_h(x) = -\int 0\cdot dx$$

$$V(x) = C_V$$

$$M_h(x) = \int V(x)\cdot dx$$

$$M_h(x) = \int C_V\cdot dx$$

$$M(x) = C_V x + C_M$$

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad C_M = -C_V L$$

$$\beta_h(x) = -\int \frac{M(x)}{E\cdot I}\cdot dx$$

$$\beta_h(x) = -\frac{1}{E\cdot I}\int (C_V x - C_V L)\cdot dx$$

$$\beta(x) = \frac{C_V}{E\cdot I}\left(Lx - \frac{1}{2}x^2\right) + C_\beta$$

$$\beta(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_\beta = 0$$

$$\beta(x) = \frac{1}{2}\frac{C_V}{E\cdot I}(2Lx - x^2)$$

$$e_h(x) = \int \beta(x)\cdot dx$$

$$e_h(x) = \int \frac{1}{2}\frac{C_V}{E\cdot I}(2Lx - x^2)\cdot dx$$

$$e(x) = \frac{1}{2}\frac{C_V}{E\cdot I}\left(Lx^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + C_e$$

$$e(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_e = 0$$

$$e(L) = \Delta z$$

$$\frac{1}{3}\frac{C_V}{E\cdot I}L^3 = \Delta z$$

$$C_V = 3\frac{EI}{L^3}\Delta z \quad \rightarrow \quad C_M = -3\frac{EI}{L^2}\Delta z$$

$$\boldsymbol{V(x) = 3\frac{EI}{L^3}\Delta z}$$

$$M(x) = 3\frac{EI}{L^3}\Delta z\cdot x - 3\frac{EI}{L^2}\Delta z$$

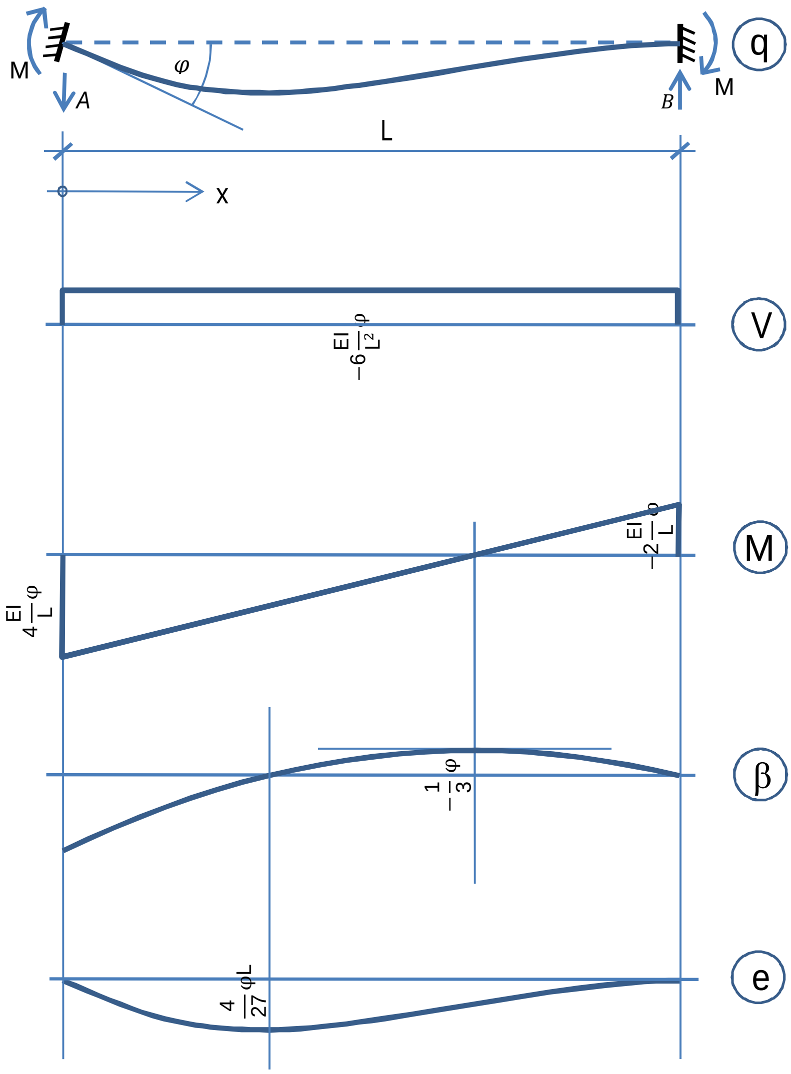
$$\boldsymbol{M(x) = 3\frac{EI}{L^3}\Delta z\cdot (x - L)} \qquad M(0) = -3\frac{EI}{L^2}\Delta z \qquad M(L) = 0$$

$$\boldsymbol{\beta(x) = \frac{3}{2}\frac{\Delta z}{L^3}(Lx - x^2)} \qquad \beta(0) = 0 \qquad \beta(L) = \frac{3}{2}\frac{\Delta z}{L}$$

$$\boldsymbol{e(x) = \frac{3}{2}\frac{\Delta z}{L^3}\left(Lx^2 - \frac{1}{3}x^3\right)} \qquad e(0) = 0 \qquad e(L) = \Delta z$$

A tartó pontosan úgy viselkedik, mint a két végén befogott tartó bal fele, mivel a két végén befogott tartó középpontjában nyomatéki nullpont van. Ha itt a fesztávot is és a támaszsüllyedést is megfelezzük, ugyanazokat a függvényeket kapjuk, mint a két végén befogott tartónál.

3.11. Két végén befogott tartó támasz-elfordulása



$$\boldsymbol{q(x) = 0}$$

$$V_h(x) = -\int q(x)\cdot dx$$

$$V_h(x) = -\int 0\cdot dx$$

$$V(x) = C_V$$

$$M_h(x) = \int V(x)\cdot dx$$

$$M_h(x) = \int C_V\cdot dx$$

$$M(x) = C_V x + C_M$$

$$\beta_h(x) = -\int \frac{M(x)}{E\cdot I}\cdot dx$$

$$\beta_h(x) = -\frac{1}{E\cdot I}\int (C_V x + C_M)\cdot dx$$

$$\beta(x) = \frac{1}{E\cdot I}\left(\frac{1}{2}C_V x^2 + C_M x\right) + C_\beta$$

$$\beta(0) = \varphi \quad \rightarrow \quad C_\beta = \varphi$$

$$\beta(L) = 0 \quad \rightarrow \quad C_M = \frac{EI}{L}\varphi - \frac{1}{2}C_V L$$

$$\beta(x) = -\frac{1}{E\cdot I}\left(\frac{1}{2}C_V x^2 + \frac{EI}{L}\varphi x - \frac{1}{2}C_V L x\right) + \varphi$$

$$e_h(x) = \int \beta(x)\cdot dx$$

$$e_h(x) = -\frac{1}{E\cdot I}\int\left(\frac{1}{2}C_V x^2 + \frac{EI}{L}\varphi x - \frac{1}{2}C_V L x\right)\cdot dx$$

$$e(x) = -\frac{1}{E\cdot I}\left(\frac{1}{6}C_V x^3 + \frac{1}{2}\frac{EI}{L}\varphi x^2 - \frac{1}{4}C_V L x^2\right) + \varphi x + C_e$$

$$e(0) = 0 \rightarrow \qquad C_e = 0$$

$$e(L) = 0 \rightarrow \qquad \frac{1}{E\cdot I}\left(\frac{1}{6}C_V L^3 + \frac{1}{2}\frac{EI}{L}\varphi L^2 - \frac{1}{4}C_V L L^2\right) = \varphi L$$

$$C_V = -6\frac{EI}{L^2}\varphi \qquad\qquad C_M = \frac{EI}{L}\varphi + \frac{1}{2}6\frac{EI}{L^2}\varphi = 4\frac{EI}{L}\varphi$$

$$\boldsymbol{V(x) = -6\frac{EI}{L^2}\varphi}$$

$$M(x) = -6\frac{EI}{L^2}\varphi\cdot x + 4\frac{EI}{L}\varphi$$

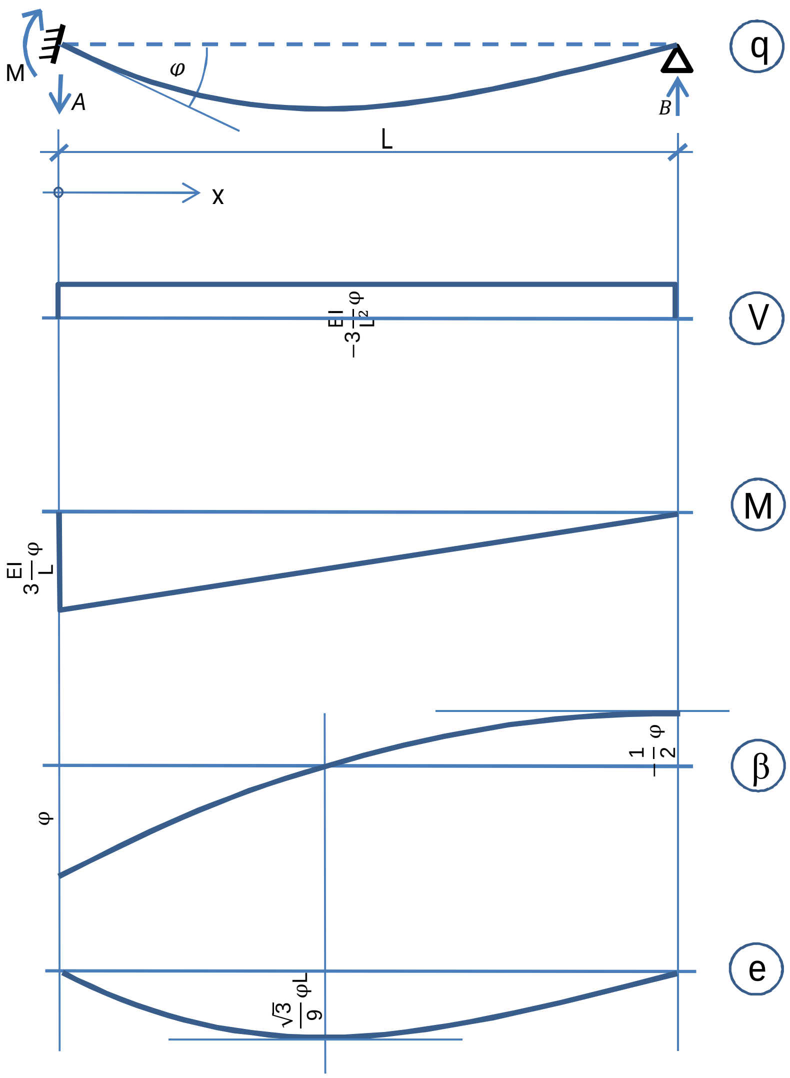
$$\boldsymbol{M(x) = \frac{EI}{L^2}\varphi(4L - 6x)} \qquad M(0) = 4\frac{EI}{L}\varphi \qquad M(L) = -2\frac{EI}{L}\varphi$$

$$\beta(x) = -\frac{1}{E\cdot I}\left(-\frac{1}{2}6\frac{EI}{L^2}\varphi x^2 + \frac{EI}{L}\varphi x + \frac{1}{2}6\frac{EI}{L^2}\varphi L x\right) + \varphi$$

$$\boldsymbol{\beta(x) = \frac{\varphi}{L^2}(3x^2 - 4Lx + L^2)} \qquad \beta(0) = \varphi \qquad \beta\left(\frac{L}{3}\right) = 0 \qquad \beta_{max} = \beta\left(\frac{2}{3}L\right) = -\frac{1}{3}\varphi$$

$$\boldsymbol{e(x) = \frac{\varphi}{L^2}(x^3 - 2Lx^2 + L^2 x)} \qquad e(0) = e(L) = 0 \qquad e_{max} = e\left(\frac{1}{3}L\right) = \frac{4}{27}\varphi L$$

3.12. Egyik végén befogott tartó támasz-elfordulása



$$\boldsymbol{q(x) = 0}$$

$$V_h(x) = -\int q(x)\cdot dx$$

$$V_h(x) = -\int 0 \cdot dx$$

$$V(x) = C_V$$

$$M_h(x) = \int V(x)\cdot dx$$

$$M_h(x) = \int C_V \cdot dx$$

$$M(x) = C_V x + C_M$$

$$M(L) = 0 \quad \rightarrow \quad C_M = -C_V L$$

$$M(x) = C_V(x-L)$$

$$\beta_h(x) = -\int \frac{M(x)}{E\cdot I}\cdot dx$$

$$\beta_h(x) = -\frac{1}{E\cdot I}\int C_V(x-L)dx$$

$$\beta(x) = -\frac{1}{E\cdot I}C_V\left(\frac{1}{2}x^2 - Lx\right) + C_\beta$$

$$\beta(0) = \varphi \quad \rightarrow \quad C_\beta = \varphi$$

$$\beta(x) = -\frac{C_V}{E\cdot I}\left(\frac{1}{2}x^2 - Lx\right) + \varphi$$

$$e_h(x) = \int \beta(x)\cdot dx$$

$$e_h(x) = \int \left[-\frac{C_V}{E\cdot I}\left(\frac{1}{2}x^2 - Lx\right) + \varphi\right]dx$$

$$e(x) = -\frac{C_V}{E\cdot I}\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}Lx^2\right) + \varphi x + C_e$$

$$e(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_e = 0$$

$$e(L) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{C_V}{E\cdot I}\left(\frac{1}{6}L^3 - \frac{1}{2}L^3\right) = \varphi L$$

$$C_V = -3\frac{EI}{L^2}\varphi \qquad C_M = 3\frac{EI}{L}\varphi$$

$$\boldsymbol{V(x) = -3\frac{EI}{L^2}\varphi}$$

$$\boldsymbol{M(x) = 3\frac{EI}{L^2}\varphi(L-x)} \qquad M(0) = 3\frac{EI}{L}\varphi \qquad M(L) = 0$$

$$\beta(x) = 3\frac{\varphi}{L^2}\left(\frac{1}{2}x^2 - Lx\right) + \varphi$$

$$\boldsymbol{\beta(x) = \frac{1}{2}\frac{\varphi}{L^2}(3x^2 - 6Lx + 2L^2)} \qquad \beta(0) = \varphi \qquad \beta(L) = -\frac{1}{2}\varphi$$

Zérushely: $3x_{\beta0}^2 - 6Lx_{\beta0} + 2L^2 = 0$

$$x_{\beta0} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)L$$

$$\boldsymbol{e(x) = \frac{1}{2}\frac{\varphi}{L^2}(x^3 - 3Lx^2 + 2L^2x)} \qquad e(0) = e(L) = 0 \qquad e_{max} = e(x_{\beta0}) = \frac{\sqrt{3}}{9}\varphi L$$