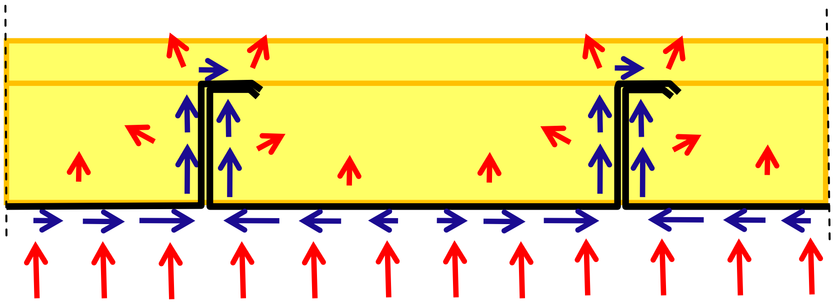
”C”-kazettás térelhatároló szerkezetek hőátbocsátása

„***A rétegtervi hőátbocsátási tényező*** (*U*) a szerkezet általános helyen vett metszetére számított vagy a termék egészére, a minősítési iratban megadott [W/(m^{2}K) mértékegységű] jellemző, amely ***tartalmazza nem homogén szerkezetek esetén a szerkezeten belül, jellemzően előforduló*** átlagos mennyiségben figyelembe vett ***pontszerű*** (rögzítési rendszerek, konzolok, csavarok, átkötővasak stb. által okozott) ***és vonalmenti*** (vázszerkezetek, hézagok, panelcsatlakozások stb. által okozott) ***hőhidak hatását is***.”

Az idézet a 7/2006. (V. 24.) TNM rendeletből való (az épületek energetikai jellemzőinek meghatározásáról), mégpedig a 2. melléklet II. 3.1 pontból. Gyakori hiba ennek figyelmen kívül hagyása. Több tervben találkoztam vele, és láttam olyan energetikai tanúsítványokat, amelyekben emiatt a tanúsító 2 kategóriát tévedett. A csarnoképítésben, illetve a fémlemezes térelhatárolásban tipikusan a ”C”-kazettás szerkezeteknél és a szelemenek között elhelyezett hőszigetelésnél találkozunk vele.

Az elméleti nehézséget az jelenti, hogy a hőáramok nem merőlegesek a felületre. Az acél hővezetési tényezője 58,1 W/(mK), ami sokszorosa a benne levő hőszigetelés hővezetési tényezőjénél, amely 0,036-0,040 W/(mK). Emiatt a ”C”-kazettás szerkezetekben a kazetták gerincénél rosszabb a szerkezet hőszigetelése, mint a kazetták középvonalánál, így a gerincnél nagyobb hőlépcső van a légtér és a felület között, mint középen. Ebből következik, hogy a belső felületi hőmérséklet a gerinceknél kisebb, mint a kazetták középvonalánál. Mivel a hő mindig a magasabb hőmérsékletű pontból az alacsonyabb felé áramlik, a kazetta hátlapjában a gerincek felé két irányban hőáram alakul ki, amelyek a gerincnél egyesülve kifele mennek tovább:



A kazettában létrejövő belső hőáramok lényegesen befolyásolják a kiáramló hőmennyiséget és a felületi hőmérsékletet. A hőátbocsátási tényező meghatározásának elve az, hogy ki kell számolni a szerkezeten áthaladó hőmennyiséget, majd ezt el kell osztani a felülettel, az idővel, és a külső-belső hőmérséklet különbségével. Homogén szerkezet esetén, amelyben a hőáramok párhuzamosak, ez egyszerű: a felületből kiveszünk egy elemi szálat, és a vonalas hőáramlás ismert képletét alkalmazzuk. Itt azonban a feladat matematikai bonyolultsága nagyságrendekkel nagyobb, direkt megoldás zárt képlettel eleve reménytelen. Egy gyakorló mérnöktől egy tervezési feladat során ennek megoldása nem várható el, és nem is feladata. A gyártók szerepe az, hogy a termékük megfelelő betervezése és beépítése érdekében adatot szolgáltassanak. Ilyen adatokat csak itt-ott, és nagyon korlátozott paraméterekkel találtam, ezért 2004-ben nekifekűdtem a feladatnak, és nagy munka-befektetéssel létrehoztam egy két dimenziós véges-elem számításon alapuló szoftvert, amely a paraméterek megadása után kiadja a hőátbocsátási tényezőt. A mellékletben megtalálható a szoftver matematikai leírása.

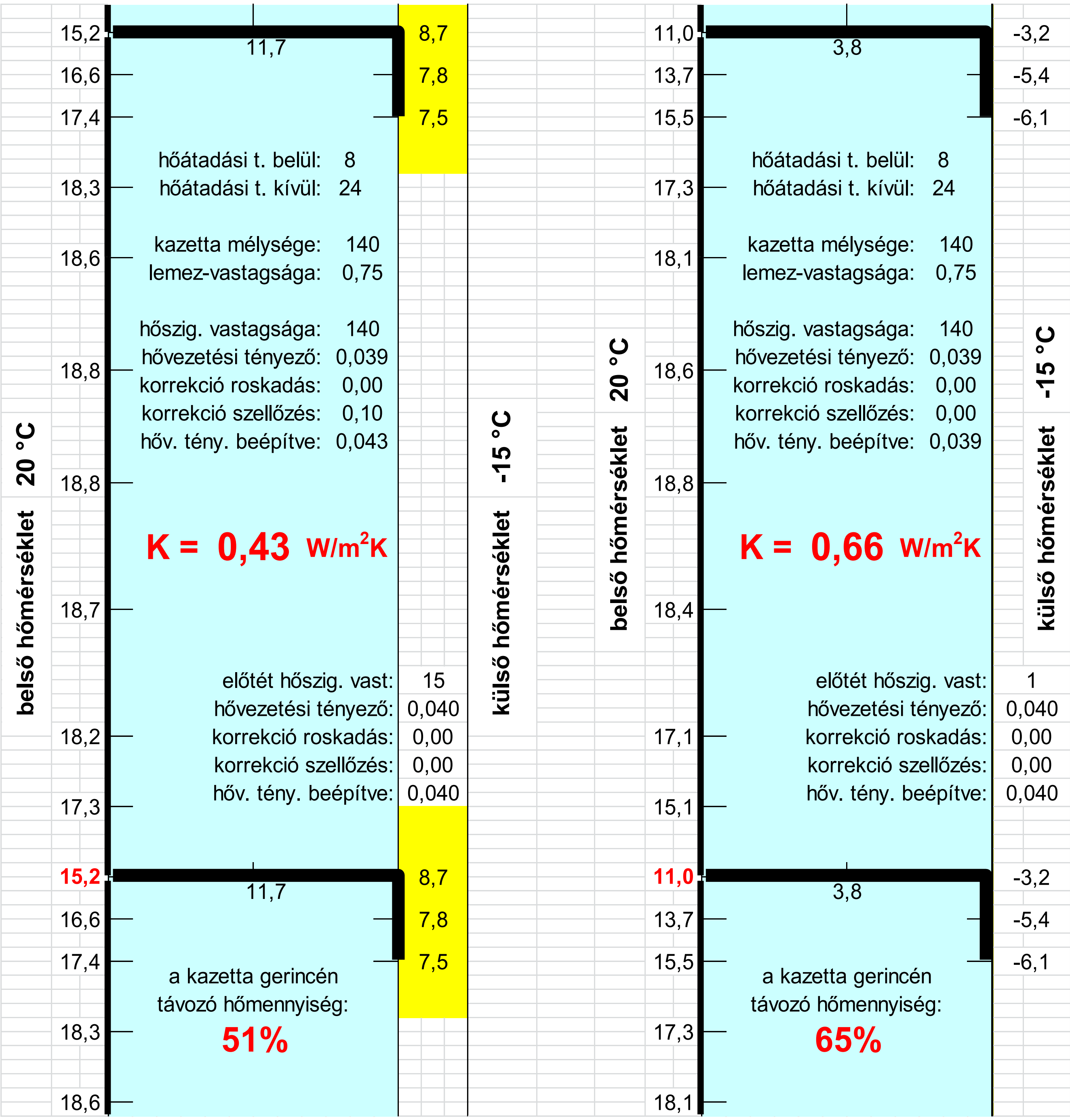
Az alábbi adatokat kell megadni:

- a kazetta szélessége (ez majdnem minden gyártmánynál 600 mm)
- a kazetta mélysége
- a kazetta lemezvastagsága
- a kazettában levő hőszigetelés vastagsága (ez azonos a kazetta mélységével)
- a kazettában levő hőszig. hővezetési tényezője és korrekciós tényezői roskadás és kiszellőzés miatt
- az előtét hőszigetelés vastagsága
- az előtét hőszigetelés hővezetési tényezője és korrekciós tényezői roskadás és kiszellőzés miatt
- a hőátadási tényező belül (fal esetén 8, tető esetén 12)
- a hőátadási tényező kívül (fal esetén 24, tető esetén 12)
- a belső és a külső hőmérséklet

A hőátbocsátási tényező a belső és a külső hőmérséklettől nem függ, de a szoftver több pontban megadja a kazetta hőmérsékletét, ehhez kell a belső és a külső léghőmérséklet.

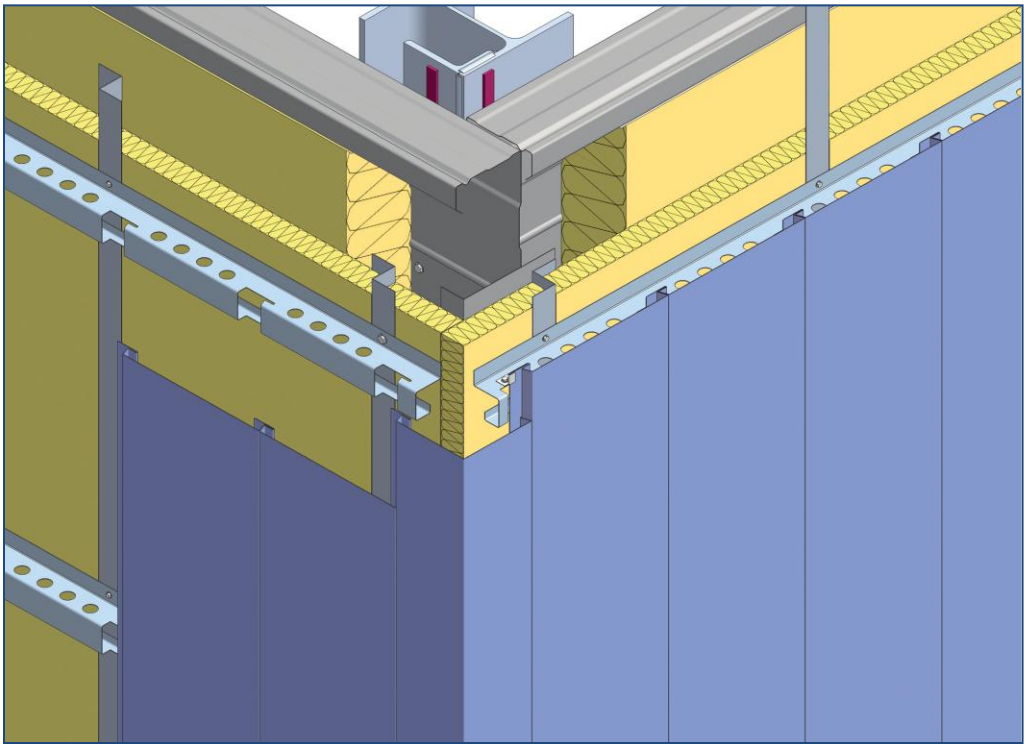
Nézzünk egy korábbi példát szerelt falra 0,45 W/(m^{2}K) követelménnyel. A 145-ös kazetták külső övére 12 cm széles 15 mm vastag polifoam csíkot ragasztottunk, ahogy az a DOKA iroda és bemutató épületnél történt.

Összehasonlításul melléteszünk egy másik eredménylapot, amelyen az előtét hőszigetelés csak 1 mm. Korábban gyakori volt, hogy a külső övre csak 3 cm széles öntapadó szivacsos elválasztó csíkot tettek, amely keskenyebb volt, mint a kazetta külső öve, és össze is nyomódott. Ezt modellezzük.



Mint ahogy azt a bal oldali ábrán láthatjuk, az alkalmazott megoldás megfelel a kivitelezés időpontjában előírt értéknek. A belső felületi hőmérséklet a kazetták középvonalán 18,8 °C, a kazetták gerincénél 15,2 °C, a belső léghőmérsékletnél 4,8 °C-kal alacsonyabb. Ha a bordákat elhanyagolva csak a kazetta közepén számolnánk a hőátbocsátási tényezőt, akkor 0,29 W/(m^{2}K)-t kaptunk volna, közel 50%-ot tévedve! A gyenge kivitelezők által alkalmazott rossz gyakorlat azt eredményezte, hogy a szerkezet a hőátbocsátási követelménynek nem felelt meg, a tévedés 126%-os, a belső felületi hőmérséklet a gerincnél csak 11,0 °C, amely átlagos páratartalomnál kicsapódást eredményez.

Nézzünk egy mai példát a közel nulla energiaigényű épületek oldalfalára 0,24 W/(m^{2}K) követelménnyel.



A 150-es kazetták külső övére csavarozott függőleges bordák között 80 mm vastag előtét hőszigetelést teszünk. A ”Z” bordák távolsága 1,2 m, lemezvastagsága 1,5 mm. A külső burkolat mögött átszellőztetett légrés van. Előtét hőszigetelésként üvegfátyollal kasírozott kőzetgyapot alkalmazunk, hogy az átszellőzésből adódóan a hőszigetelés külső rétegeiben ne tudjon cserélődni a levegő. Így készült Győr új sportkomplexumában a Multi-Torna és a Júdó csarnok külső falszerkezete.

E példában az előtét-szigetelést is bordák szakítják meg, ezért 3 dimenziós hőáramlásunk lesz. A szoftverünk viszont csak 2 dimenziós, ezért egy trükkhöz kell folyamodnunk, amely a biztonság javára való közelítéssel jár. A tervezés lépései az alábbiak:

1. Az alkalmazott kazetta elé olyan vastag homogén hőszigetelést teszünk, hogy elérjük a kívánt hőátbocsátási tényezőt. A 2D modellben próbálgatással pontosítjuk a rátét hőszigetelés vastagságát, figyelve a hőátbocsátási tényező változását.

2. Kiszámítjuk a kazetta egyenértékű vastagságát az alábbi képlettel, azaz megnézzük, hogy a kazetta helyett milyen homogén hőszigetelés-vastagságot kellene alkalmazni, hogy a hőátbocsátási tényező ugyanannyi maradjon:

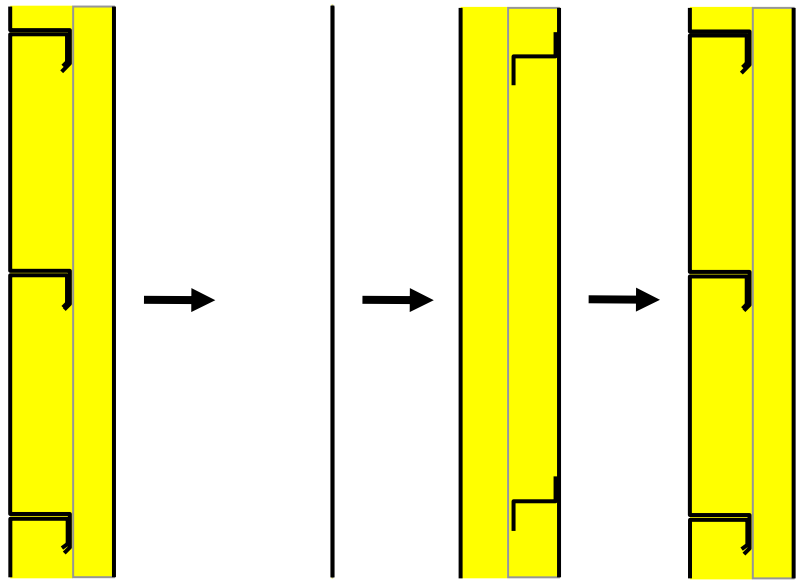
$$U = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{d_e}{\lambda_e} + \frac{d_{sz}}{\lambda_{sz}} + \frac{1}{\alpha_o}} \quad \Longrightarrow \quad d_e = \lambda_e \cdot \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{\alpha_o} - \frac{d_{sz}}{\lambda_{sz}} \right)$$

3. Most megfordítjuk a szerepeket: a valódi kazettát homogén hőszigetelésnek tekintjük az egyenértékű vastagsággal, a rátétet a távtartókkal és a szellőző légréssel fordított kazettának. A képzelt fordított kazetta szélessége a távtartók távolságával egyenlő, lemezvastagsága a távtartók lemezvastagságának a fele. A 2D modellbe a kazetta-mélység és a kazetta-hőszigetelés vastagságának helyére a távtartó-magasság egy becsült kiindulási értékét írjuk. A rátét hőszigetelés vastagsága a kazetta előbb kiszámolt egyenértékű vastagsága lesz. A külső-belső hőátadási tényezőt és a hőszigetelések jellemzőit fölcseréljük (hővezetési tényező, veszteségtényező)

4. A távtartók magasságát addig változtatjuk, amíg a kívánt hőátbocsátási tényezőt el nem érjük. A 2D modellben ez a kazetta-mélység és a kazetta-hőszigetelés vastagságának próbálgatását jelenti. Megnézzük, hogy a fölső távtartók magassága mekkora egyenértékű vastagságnak felel meg. Ekkor az egyenértékű vastagságnak az 1. pontban levő rátét homogén hőszigetelés vastagságával egyenlőnek kell lennie (pirossal jelölt számok).

5. A távtartó magasságát fölfelé kerekítjük a beszerezhető méreteket figyelembe véve (a 2D modellben ez a kazetta-mélység és a kazetta-hőszigetelés vastagságának átírásával), így kiszámítjuk a konstrukció tényleges vastagságát.

6. Ellenőrzésképp lefuttatjuk a 2D modellt a tényleges kazetta-méretekkel és az alkalmazott előtét-szigetelés egyenértékű vastagságával. A szoftver megadja a kazettán belüli hőmérséklet-eloszlást.



A számítás lépéseit az alábbi táblázatban foglaljuk össze a 2D-s számításnak csak a végeredményeit szerepeltetve a táblázatban (a légrés miatt a külső hőátadási tényezőt is 8-nak vettük:

szám.	α_i	kazetta			hővez.	d_{sz}	hővez.	α_o	U	d_e
lépés	hőátad.	mag.	széles.	lem.vast.	W/mK	rátét szig.	W/mK	hőátad.	W/m2K	mm
1, 2	8	150	600	0,88	0,039	**56,0**	0,036	8	**0,240**	92,1
3	8	70	1200	0,75	0,036	92,1	0,039	8	0,236	58,5
4	8	67	1200	0,75	0,036	92,1	0,039	8	0,240	**56,0**
5	8	80	1200	0,75	0,036	92,1	0,039	8	0,225	66,0
6	8	150	600	0,88	0,039	66,0	0,036	8	**0,225**	92,1

Székesfehérvár, 2017.06.24.

Sas Viktor
okl. építőmérnök
matematikus szakmérnök

Melléklet:
a 2D modell matematikai leírása a következő laptól kezdődően

”C”-kazettás külső térelhatároló szerkezetek hőátbocsátási tényezőjének számítása 2 dimenziós végeselem módszerrel

1. Az elmélet lényege

A valóságban a szerkezet pontjainak hőmérsékletét egy kétváltozós függvény írja le. Az x tengely legyen a felületre merőleges, és mutasson belülről kifelé. Az y tengely feküdjön a szerkezet belső felületének síkjában, és legyen merőleges a kazettákra (fal estén fölfelé mutató függőleges). Hosszirányban a kazetták mentén a szerkezet nem változik, ezért a hőmérsékletfüggvény sem fog változni. Egységnyi, 1 m hosszú szerkezetet vizsgálunk, és csak a metszettel foglalkozunk. A hőmérsékletfüggvény az y tengely mentén periódikusan ismétlődő, mert a szerkezet is ezt teszi, 0,6 m –enként.

A hőmérsékletfüggvény: $T(x,y)$

Ha e függvényt ismernénk, akkor könnyű helyzetben lennénk, mert a belső oldalon kiszámítanánk, hogy a fal a belső légtérből mennyi hőt vesz fel.

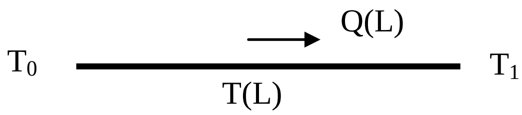
(2) $$Q = \int_{y=0}^{0,6} \alpha_b * (T_b - T_{0,y})\ dy$$

Ugyanezt megtehetjük a külső oldalon is, kiszámítva a leadott hőmennyiséget :

(3) $$Q = \int_{y=0}^{0,6} \alpha_k * (T_{d,y} - T_k)\ dy$$

α_k a külső hőátadási tényező, T_k a külső léghőmérséklet.
$T_{d,y}$ a külső felületi hőmérséklet

Most tekintsünk egy jó hővezetésű vonalelemet, amelyben a hossz mentén párhuzamos hőáramlás van:



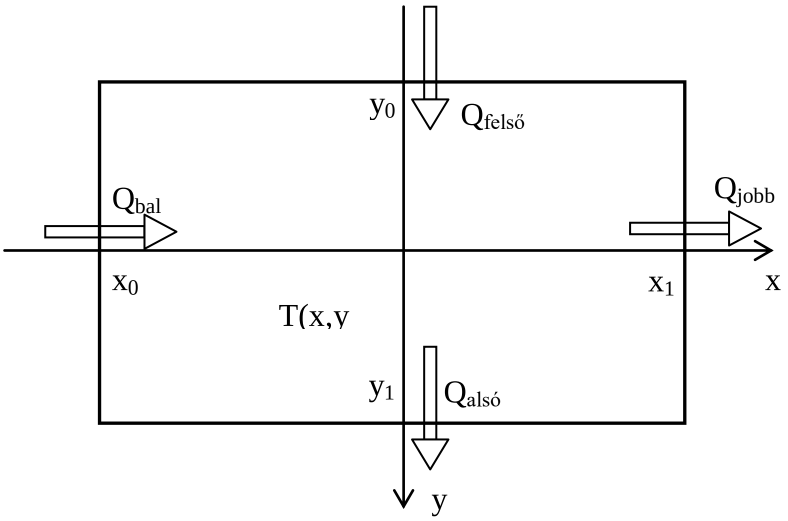
Ha a vonalelem és a környezet közötti hőcserét elhanyagoljuk, a vonalelem hossza mentén állandó nagyságú hőáram lesz, amely:

(4) $Q = - k * A * (T_1 - T_0) / L_1$ ahol A a keresztmetszet, L_1 a hossz.

Ha a vonalelem és a környezet közötti hőcserét figyelembe vesszük, a szállított hőmennyiség egy Q(L) függvény lesz, és a hőmérséklet sem egyenletesen változni fog a hossz mentén. Ha a vonalelem hővezetése nagyságrendekkel jobb, mint a környezeté, egy kicsi szakaszon a szállított hőmennyiséghez képest a felületen felvett vagy leadott hőmennyiség elenyésző.

(5) $Q = - k * A * dT/dL$ (6) $Q = - k * A * T'_L$

Az alábbi ábra egy téglalap alakú felületelemet mutat, amelynek a hőmérsékletfüggvénye T(x,y). A felületelemen belül a hőáramlás iránya és erőssége változik. Az oldalakon átlépő hőmennyiségek:



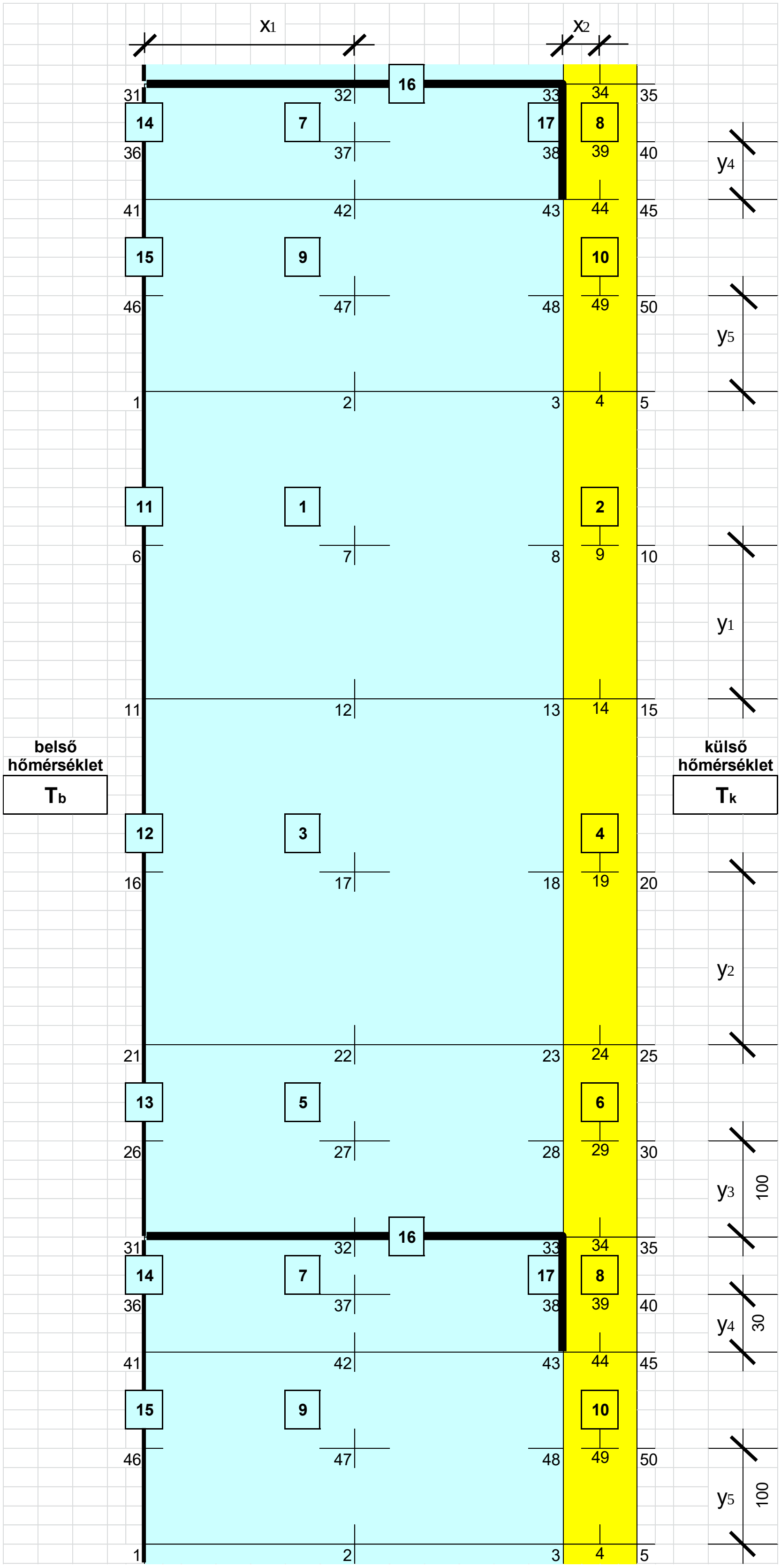
(8) $$Q_{alsó} = - \int_{x=x_0}^{x_1} k * T_y'(x,y_1)\ dx$$

(9) $$Q_{felső} = - \int_{x=x_0}^{x_1} k * T_y'(x,y_0)\ dx$$

(10) $$Q_{bal} = - \int_{y=y_0}^{y_1} k * T_x'(y,x_0)\ dy$$

(11) $$Q_{jobb} = - \int_{y=y_0}^{y_1} k * T_x'(y,x_1)\ dy$$

A fenti egyenletek egy ismeretlen kétváltozós függvény integrál-egyenletei, illetve differenciál-egyenletei. Ezen egyenletrendszer analitikus megoldására semmi remény nincs, ezért a véges elem módszerhez folyamodunk.



A tartományt vízszintes és függőleges vonalakkal az ábra szerint téglalap alakú részekre osztjuk.

A kazetták részeit vonalelemeknek tekintjük, a hőszigetelést pedig téglalap elemnek. A hőmérséklet változását másodfokú függvényekkel közelítjük. E másodfokú függvények a vonalelemben egyváltozósak, a téglalapelemekben kétváltozósak. A vonalelem hőmérsékletfüggvénye meghatározható 3 pont, célszerűen a végpontok és a felezőpont hőmérsékletével. A téglalapelem hőmérsékletfüggvénye meghatározható 9 pont, célszerűen a sarokpontok, az oldalfelező pontok és a középpont hőmérsékletével.

A hőmérsékletfüggvény és az áramló hőmennyiség között matematikai összefüggést teremtünk. Így a kijelölt pontok hőmérsékletének függvényében minden elemre kiszámíthatjuk a végpontokon áthaladó, illetve az oldalakon átfolyó hőmennyiséget.

Az alábbi egyenleteket felírva egy nagy egyenletrendszert kapunk:

- Egyensúlyi egyenletek: Az energia-megmaradás szerint az egy elembe belépő és onnan kilépő hőmennyiségek egyenlőek.
- Peremfeltételek: A belső és a külső oldalon a határoló vonalakra a levegő és a falfelület közötti hőátadás összefüggése érvényes.
- Csatlakozási egyenletek az egymással érintkező elemek között:
  - A szomszédos téglalapelemek közös oldalán az egyikből távozó hőmennyiség egyenlő a másikba belépő hőmennyiséggel.
  - A szomszédos vonal- és téglalapelemeknél a vonalelem oldalán távozó hőmennyiség egyenlő a téglalapba belépő hőmennyiséggel.
  - A szomszédos vonalelemek csatlakozási pontján az egyikből távozó hőmennyiség egyenlő a másikba belépő hőmennyiséggel.
  - A kazetták szélessége 0,6 m, ezért a hőmérséklet változása 0,6 m-enként ciklikus. A számításkor 0,6 m széles sávot jelölünk ki, a sáv alján kilépő és a tetején belépő hőmennyiségek egyenlőek.
  - A hőmérsékletfüggvényekben a csatlakozási pontoknál nincs törés.

Az ismeretlenek száma a felosztás sűrűségétől függ. Minél sűrűbb a felosztás, annál pontosabb az eredmény. Az egyenletrendszert megoldva megkapjuk a hőmérsékleteket, ezekből pedig kiszámolhatók az áramló hőmennyiségek. A hőmennyiségeket a belső, vagy a külső felületen összegezve, a felülettel és a külső-belső hőmérséklet-különbséggel osztva megkapjuk a hőátbocsátási tényezőt.

2. A hőmérséklet-függvények

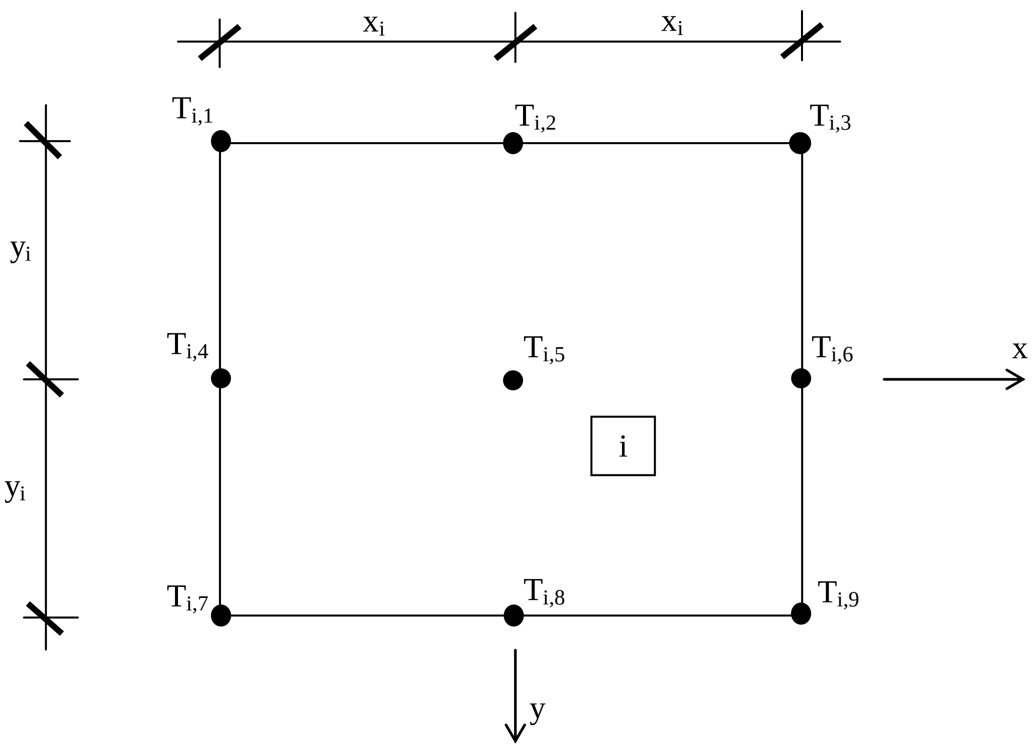
2.1 Téglalap-elem

Az ismeretlen kétváltozós hőmérsékletfüggvényt minden téglalap fölött egy-egy másodfokú függvénnyel közelítjük. A téglalapok hőmérsékletfüggvényei 9 paramétert tartalmaznak. Az i –edik elem hőmérsékletfüggvénye:

(12) $T_i(x,y) = a_i * x^2y^2 + b_i * x^2y + c_i * xy^2 + d_i * x^2 + e_i * y^2 + f_i * x\,y + g_i * x + h_i * y + i_i$

Ezt a függvényt könnyedén tudjuk deriválni és integrálni.

A koordinátákat a következő ábra szerinti 9 pontban behelyettesítve 9 egyenletet kapunk, amelyek összefüggést teremtenek az együtthatók és a kijelölt pontok hőmérsékletei között:



$$
\left.\begin{array}{llllllllll}
T_{i1} = & a_i x_i^2 y_i^2 & - b_i x_i^2 y_i & - c_i x_i y_i^2 & + d_i x_i^2 & + e_i y_i^2 & + f_i x_i y_i & - g_i x_i & - h_i y_i & + i_i \\
T_{i2} = & & & & & + e_i y_i^2 & & & - h_i y_i & + i_i \\
T_{i3} = & a_i x_i^2 y_i^2 & - b_i x_i^2 y_i & + c_i x_i y_i^2 & + d_i x_i^2 & + e_i y_i^2 & - f_i x_i y_i & + g_i x_i & - h_i y_i & + i_i \\
T_{i4} = & & & & + d_i x_i^2 & & & - g_i x_i & & + i_i \\
T_{i5} = & & & & & & & & & + i_i \\
T_{i6} = & & & & + d_i x_i^2 & & & + g_i x_i & & + i_i \\
T_{i7} = & a_i x_i^2 y_i^2 & + b_i x_i^2 y_i & - c_i x_i y_i^2 & + d_i x_i^2 & + e_i y_i^2 & - f_i x_i y_i & - g_i x_i & + h_i y_i & + i_i \\
T_{i8} = & & & & & + e_i y_i^2 & & & + h_i y_i & + i_i \\
T_{i9} = & a_i x_i^2 y_i^2 & + b_i x_i^2 y_i & + c_i x_i y_i^2 & + d_i x_i^2 & + e_i y_i^2 & + f_i x_i y_i & + g_i x_i & + h_i y_i & + i_i
\end{array}\right\}
$$

Az egyenletrendszert átrendezve az együtthatókat kifejezzük a speciális pontok hőmérsékleteivel. Ezeket visszahelyettesítve a hőmérsékletfüggvénybe tulajdonképpen egy kétváltozós másodfokú interpoláló függvényt kapunk. Ez egy bizonyos elemen belül megadja, hogy egy tetszőleges pontban mennyi a hőmérséklet a speciális pontok hőmérsékletének függvényében:

(13a) $a_i = (T_{i1} + T_{i3} + T_{i7} + T_{i9} – 2\ T_{i2} – 2\ T_{i4} – 2\ T_{i6} – 2\ T_{i8} + 4\ T_{i5}) / 4x_i^2 y_i^2$

(13b) $b_i = (-T_{i1} – T_{i3} + T_{i7} + T_{i9} + 2\ T_{i2} – 2\ T_{i8}) / 4x_i^2 y_i$

(13c) $c_i = (-T_{i1} + T_{i3} – T_{i7} + T_{i9} + 2\ T_{i4} – 2\ T_{i6}) / 4x_i y_i^2$

(13d) $d_i = (T_{i4} + T_{i6} – 2\ T_{i5}) / 2x_i^2$

(13e) $e_i = (T_{i2} + T_{i8} – 2\ T_{i5}) / 2y_i^2$

(13f) $f_i = (T_{i1} – T_{i3} – T_{i7} + T_{i9}) / 4x_i y_i$

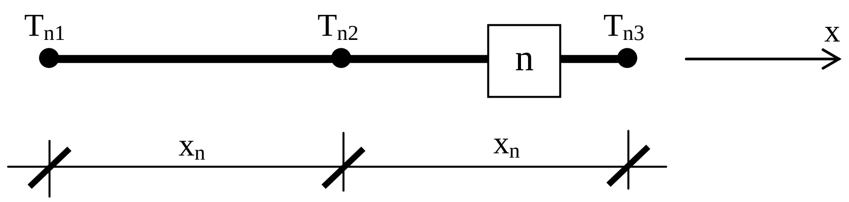
(13g) $g_i = (T_{i6} – T_{i4}) / 2x_i$

(13h) $h_i = (T_{i8} – T_{i2}) / 2y_i$

2.2 Vonal-elem

Az ismeretlen kétváltozós hőmérsékletfüggvényt minden szakasz fölött egy-egy másodfokú függvénnyel közelítjük. A szakaszok hőmérsékletfüggvényei 3 paramétert tartalmaznak. Az n –edik elem hőmérsékletfüggvénye:

(14) $T_n(x) = a_n * x^2 + b_n * x + c_n$ Ezt a függvényt könnyedén tudjuk deriválni és integrálni.



A koordinátákat az ábra szerinti 3 pontban behelyettesítve 3 egyenletet kapunk, amelyek összefüggést teremtenek az együtthatók és a kijelölt pontok hőmérsékletei között:

$$
\left.\begin{array}{llll}
T_{n1} = & a_n x_n^2 & - b_n x_n & + c_n \\
T_{n2} = & & & + c_n \\
T_{n3} = & a_n x_n^2 & + b_n x_n & + c_n
\end{array}\right\}
$$

Az egyenletrendszert átrendezve az együtthatókat kifejezzük a speciális pontok hőmérsékleteivel. Ezeket visszahelyettesítve a hőmérsékletfüggvénybe tulajdonképpen egy másodfokú interpoláló függvényt kapunk. Ez egy bizonyos vonal-elemen belül megadja, hogy egy tetszőleges pontban mennyi a hőmérséklet a speciális pontok hőmérsékletének függvényében:

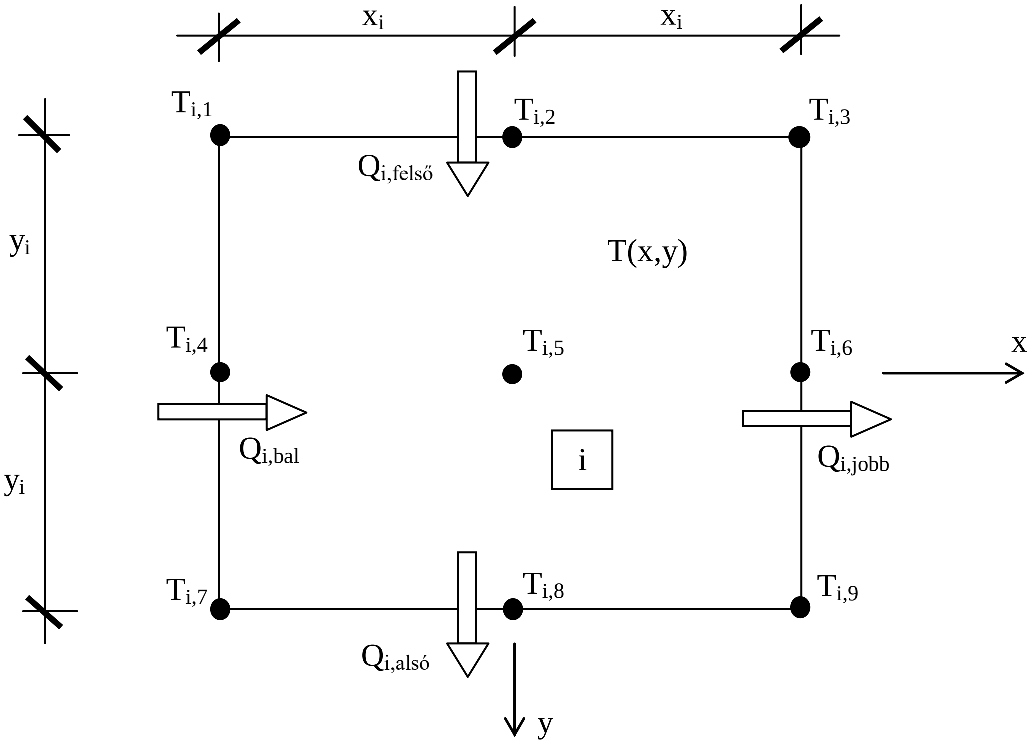
(15a) $a_n = (T_{n1} - 2T_{n2} + T_{n3}) / 2x_n^2$

(15b) $b_n = (-T_{n1} + T_{n3}) / 2x_n$

(15c) $c_n = T_{n2}$

3. Hőmérséklet – hőmennyiség összefüggések

3.1 Téglalap-elem



A téglalap-elem bal oldalán belépő hőmennyiség a (10) egyenletet felhasználva, utána deriválva és behelyettesítve (12)-t, majd behelyettesítve a (13) egyenleteket:

$$Q_{i,bal} = -\int_{y=-y_i}^{y_i} k * T_i'_x(-x_i,y)\,dy = -k * \int_{y=-y_i}^{y_i} (-2a_ix_i\,y^2 - 2b_ix_i\,y + c_i\,y^2 - 2d_ix_i + f_i\,y + g_i)\,dy =$$

$$= -k\int_{y=-y_i}^{y_i}((c_i-2a_ix_i)\,y^2 + (f_i-2b_ix_i)\,y + g_i-2d_ix_i)dy = -k\left[1/3\,(c_i-2a_ix_i)\,y^3 + ½(f_i-2b_ix_i)\,y^2 + (g_i-2d_ix_i)y\right]_{-y_i}^{y_i} =$$

$$= -1/6k[(T_{i3}+T_{i9}-T_{i1}-T_{i7}+2T_{i4}-2T_{i6})+2(T_{i7}+T_{i9}-2T_{i4}-2T_{i6}-2T_{i2}-2T_{i8}+4T_{i5})+3(T_{i6}-T_{i4})-12(T_{i4}+T_{i6}-2T_{i5})]$$

Rendezve és ugyanígy levezetve az oldalvonalakon átlépő hőmennyiségek:

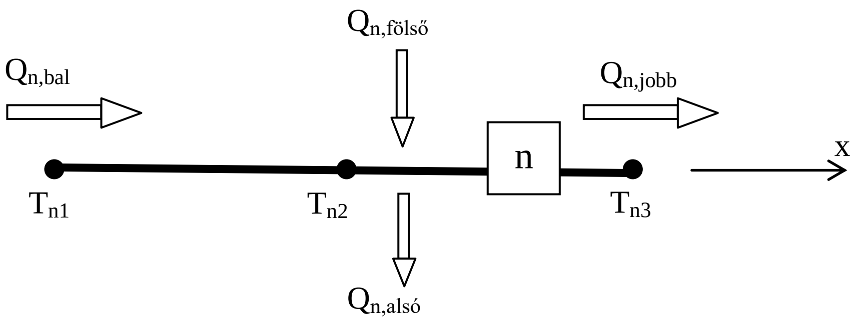
(17a) $Q_{i,bal} = -k/6\,(16\,T_{i5} - 12\,T_{i4} - 4\,T_{i6} - 3\,T_{i1} - 3\,T_{i7} - T_{i3} - T_{i9} + 4\,T_{i2} + 4\,T_{i8})\,y_i/x_i$

(17b) $Q_{i,jobb} = -k/6\,(-16\,T_{i5} + 12\,T_{i6} + 4\,T_{i4} + 3\,T_{i3} + 3\,T_{i9} + T_{i1} + T_{i7} - 4\,T_{i2} - 4\,T_{i8})\,y_i/x_i$

(17c) $Q_{i,fölső} = -k/6\,(16\,T_{i5} - 12\,T_{i2} - 4\,T_{i8} + 4\,T_{i4} + 4\,T_{i6} - 3T_{i1} - 3T_{i3} - T_{i7} - T_{i9})\,x_i/y_i$

(17d) $Q_{i,alsó} = -k/6\,(-16\,T_{i5} + 12\,T_{i8} + 4\,T_{i2} - 4\,T_{i6} - 4\,T_{i4} + 3T_{i7} + 3T_{i9} + T_{i1} + T_{i3})\,x_i/y_i$

3.2 Vízszintes vonal-elem



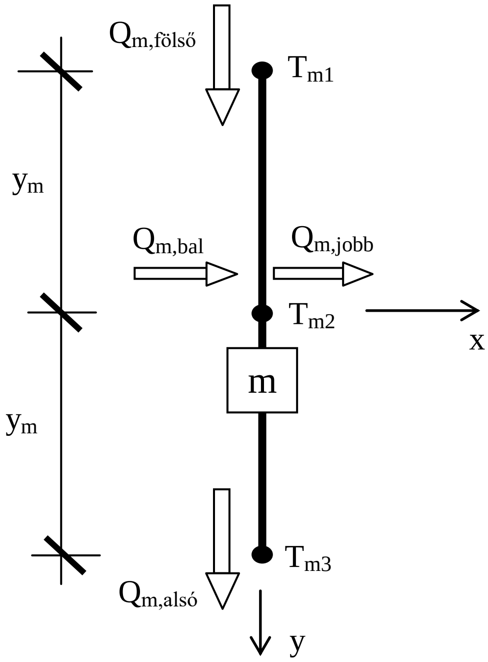
a vonal elem által vezetett hőmennyiség a (6) egyenletet felhasználva, utána deriválva és behelyettesítve (14)-et, majd behelyettesítve a (15) egyenleteket:

$Q_n = - k_v * v_n * T'_x$
$Q_n = - k_v * v_n * (2\, a_n\, x + b_n)$
$Q_n = - k_v v_n / 2x_n^2 * (-2T_{n1} - 2T_{n3} + 4T_{n2} - T_{n1} + T_{n3})$

Rendezve és a végekre alkalmazva a bal oldalon belépő és a jobb oldalon kilépő hőmennyiség:

(18a) $Q_{n,bal} = -k_v\, v_n * 1/2\, (-3T_{n1} + 4T_{n2} - T_{n3}) / x_n$
(18b) $Q_{n,jobb} = -k_v\, v_n * 1/2\, (T_{n1} - 4T_{n2} + 3T_{n3}) / x_n$

3.3 Függőleges vonal-elem



(19a) $\mathbf{Q_{m,fölső} = -k_v\, v_m * 1/2\, (-3T_{m1} + 4T_{m2} - T_{m3}) / y_m}$
(19b) $\mathbf{Q_{m,alsó} = -k_v\, v_m * 1/2\, (T_{m1} - 4T_{m2} + 3T_{m3}) / y_m}$

4. Egyensúlyi egyenletek

4.1 Téglalap-elem

Az elemnek hőegyensúlyban kell lennie, azaz a belépő és kilépő hőmennyiségek összegének meg kell egyeznie:

$Q_{i,bal} + Q_{i,felső} = Q_{i,jobb} + Q_{i,alsó}$
$Q_{i,bal} - Q_{i,jobb} + Q_{i,felső} - Q_{i,alsó} = 0$

Behelyettesítve a (17) egyenleteket:

(20) $- (y_i^2 + x_i^2)\, T_{i1} + (2y_i^2 - 4x_i^2)\, T_{i2} - (y_i^2 + x_i^2)\, T_{i3} +$
$+ (2x_i^2 - 4y_i^2)\, T_{i4} + (8x_i^2 + 8y_i^2)\, T_{i5} + (2x_i^2 - 4y_i^2)\, T_{i6} -$
$- (y_i^2 + x_i^2)\, T_{i7} + (2y_i^2 - 4x_i^2)\, T_{i8} - (y_i^2 + x_i^2)\, T_{i9} = 0$

4.2 Vonal-elem

Az elemnek hőegyensúlyban kell lennie, azaz a belépő és kilépő hőmennyiségek összegének meg kell egyeznie:

$Q_{n,bal} + Q_{n,fölső} = Q_{n,jobb} + Q_{n,alsó}$
$Q_{n,bal} - Q_{n,jobb} = Q_{n,alsó} - Q_{n,fölső}$

Behelyettesítve a (18) egyenleteket:

$-k_v v_n / 2x_n * (-3T_{n1} + 4T_{n2} - T_{n3}) - k_v v_n / 2x_n * (-T_{n1} + 4T_{n2} - 3T_{n3}) = Q_{n,alsó} - Q_{n,fölső}$

(21) $k_v v_n / x_n * (2T_{n1} - 4T_{n2} + 2T_{n3}) = Q_{n,alsó} - Q_{n,fölső}$

5. Peremfeltételek

5.1 Hőátadás belül a függőleges kazetta vonal-elemeknek

A (2) egyenletet egy kazettaelemre fölírva, majd a (14) egyenletet behelyettesítve:

$$Q_{m,bal} = \int_{y=-y_i}^{y_i} \alpha_b * \{T_b - T_m(y)\}\, dy = \int_{y=-y_i}^{y_i} \alpha_b * (T_b - \{ a_m y^2 + b_m y + c_m \})\} \, dy =$$

$$Q_{m,bal} = \alpha_b * [(T_b - c_m) * y - 1/2\, b_m y^2 + 1/3\, a_m y^3]_{-y_i}^{y_j} =$$

Behelyettesítve a (17) kifejezéseket:

$$Q_{m,bal} = \alpha_b\, 2\, (T_b - T_{m2})\, y_m + 1/3\, \alpha_b\, (T_{m1} - 2T_{m2} + T_{m3})\, y_m =$$

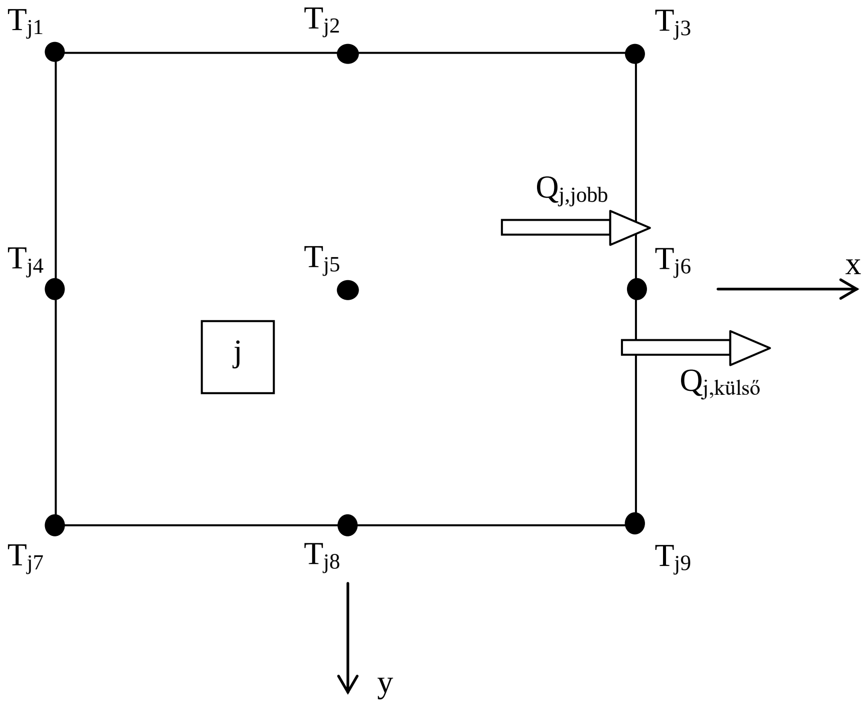
(23) $$Q_{m,bal} = 1/3\, \alpha_b\, y_m\, (6T_b - T_{m1} - 4T_{m2} - T_{m3})$$

Ezt behelyettesítve (22)-be a függőleges kazetta vonal-elem hőegyensúlyi egyenlete így fog kinézni:

$$k_v v_m / y_m * (2T_{m1} - 4T_{m2} + 2T_{m3}) = Q_{m,jobb} - 1/3\, \alpha_b\, y_m\, (6T_b - T_{m1} - 4T_{m2} - T_{m3})$$

(24) $$Q_{m,jobb} = (2k_v v_m/y_m - 1/3\, \alpha_b y_m) T_{m1} + (-\, 4k_v v_m/y_m - 4/3\, \alpha_b y_m) T_{m2} + (2k_v v_m/y_m - 1/3\, \alpha_b y_m) T_{m3} + \\ + 2\, \alpha_b y_m\, T_b$$

5.2 Hőleadás kívül téglalap-elem jobb oldalán



Ha a j –edik elem a külső oldalon van, a jobb oldalán leadott hő (ahol $x = x_j$) a (3) egyenlet szerint:

$$Q_{j,külső} = \int_{y=-y_i}^{y_i} \alpha_k * \{ T_j(x_j, y) - T_k \}\, dy$$

Behelyettesítve (12)-t:

$$Q_{j,külső} = \alpha_k \int_{y=-y_i}^{y_i} \{ (a_j x_j^2 + c_j x_j + e_j)\, y^2 + (b_j x_j^2 + f_j x_j + h_j)\, y + (d_j x_j^2 + g_j x_j + i_j - T_k) \}\, dy$$

$$Q_{j,külső} = \alpha_k\, 1/3\, (a_j x_j^2 + c_j x_j + e_j)\, 2y_j^3 + \alpha_k\, (d_j x_j^2 + g_j x_j + i_j - T_k)\, 2y_j$$

Behelyettesítve a (13) kifejezéseket-t:

$$Q_{j,külső} = 1/6\, \alpha_k\, y_j\, (T_{j1} - 2T_{j2} + T_{j3} - 2T_{j4} + 4T_{j5} - 2T_{j6} + T_{j7} - 2T_{j8} + T_{j9} - \\ - T_{j1} + 2T_{j2} + T_{j3} + 2T_{j4} - 4T_{j5} - 2T_{j6} - T_{j7} + 2T_{j8} + T_{j9}) + \\ + \alpha_k\, y_j\, (T_{j4} + T_{j6} - 2T_{j5} + T_{j6} - T_{j4} + 2T_{j5} - 2T_k)$$

(25) $Q_{j,\text{külső}} = 1/3\ \alpha_k\ y_j\ (T_{j3} + 4T_{j6} + T_{j9} - 6T_k)$

Amennyi hő kilép a külső téglalap-elemből, annyi adódik át a külső légtérnek, tehát:

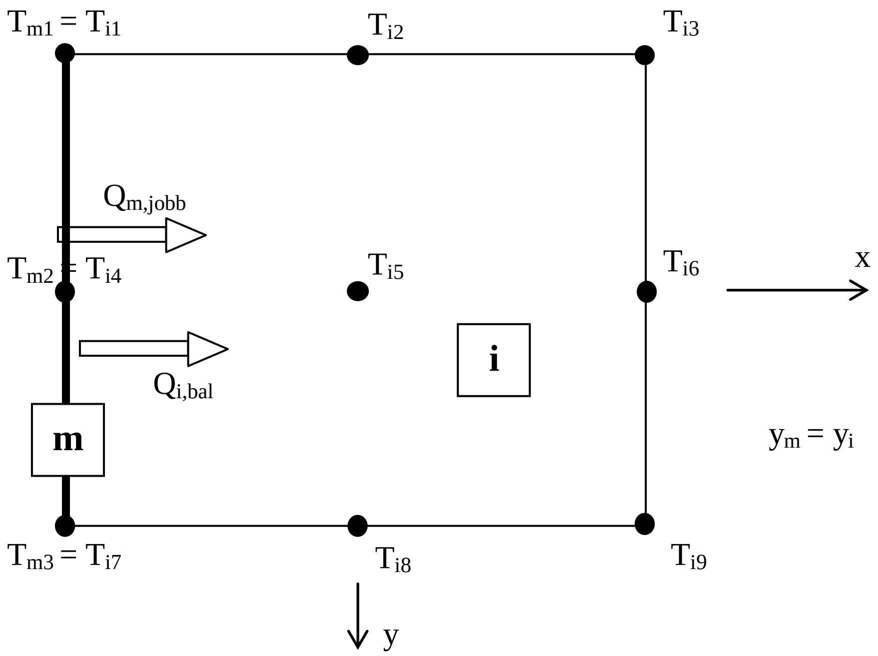
$$Q_{j,jobb} = Q_{j,\text{külső}}$$

(17b) -t és (25) –et beírva:

(26) $k/x_j\ T_{j1} - 4k/x_j\ T_{j2} + (3k/x_j + 2\alpha_k)\ T_{j3} + 4k/x_j\ T_{j4} - 16k/x_j\ T_{j5} + (12k/x_j + 8\alpha_k)\ T_{j6} +$
$+ k/x_j\ T_{j7} - 4k/x_j\ T_{j8} + (3k/x_j + 2\alpha_k)\ T_{j9} = 12\ \alpha_k\ T_k$

6. Csatlakozási egyenletek

6.1 Belső felület: kazetta vonal elem és hőszigetelés között átadódó hő



A vonal-elem jobb oldalán kilépő hőmennyiség egyenlő a téglalap-elem bal oldalán belépő hőmennyiséggel.

$$Q_{m,jobb} = Q_{i,bal}$$

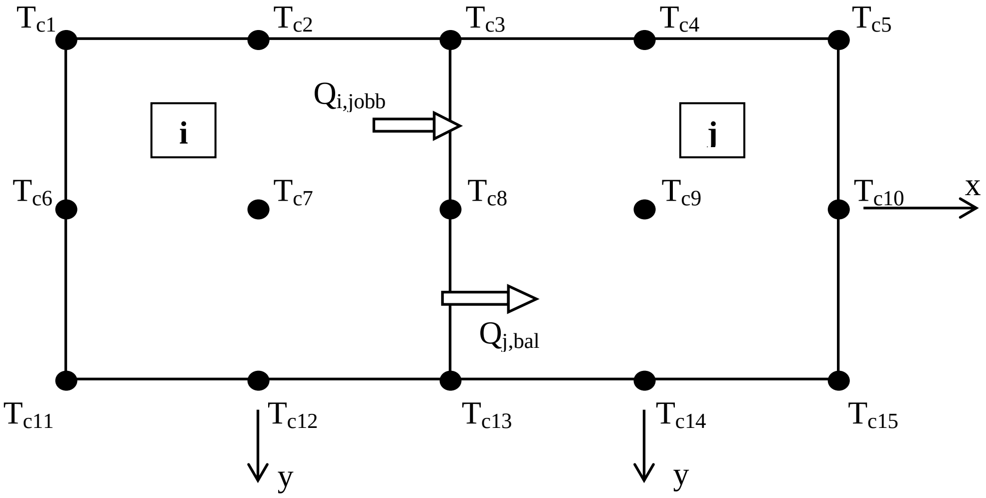
(17a) -t és (24) –et beírva:

$$(2k_v v_m/y_m - 1/3\ \alpha_b y_m)T_{m1} + (-\ 4k_v v_m/y_m - 4/3\ \alpha_b y_m)T_{m2} + (2k_v v_m/y_m - 1/3\ \alpha_b y_m)T_{m3} + 2\ \alpha_b y_m\ T_b =$$
$$= -k/6\ (16\ T_{i5} - 12\ T_{i4} - 4\ T_{i6} - 3\ T_{i1} - 3\ T_{i7} - T_{i3} - T_{i9} + 4\ T_{i2} + 4\ T_{i8})\ y_i/x_i$$

(27) $(12k_v v_m/y_m^2 - 3\ k/x_i - 2\ \alpha_b)T_{i1} + 4\ k/x_i\ T_{i2} - k/x_i\ T_{i3} +$
$+ (-\ 24k_v v_m/y_m^2 - 12k/x_i - 8\ \alpha_b)T_{i4} + 16\ k/x_i\ T_{i5} - 4\ k/x_i\ T_{i6} +$
$+ (12k_v v_m/y_m^2 - 3\ k/x_i - 2\ \alpha_b)T_{i7} + 4\ k/x_i\ T_{i8} - k/x_i\ T_{i9} = -\ 12\ \alpha_b y_m\ T_b$

6.2 Hőátadás vízszintesen szomszédos téglalap-elemek között

A két szomszédos elem csomópontjait c indexszel összevontan számoztuk. Az i, és j indexű hőmérsékletek és a c indexű hőmérsékletek az alábbiak szerint egyeznek meg:



$T_{i1}= T_{c1}$ $T_{i2}= T_{c2}$
$T_{i3}= T_{j1}.=.T_{c3}$
$T_{j2}= T_{c4}$ $T_{j3}= T_{c5}$
$T_{i4}= T_{c6}$ $T_{i5}= T_{c7}$
$T_{i6}= T_{j4}= T_{c8}$
$T_{j5}= T_{c9}$ $T_{j6}= T_{c10}$
$T_{i7}= T_{c11}$ $T_{i8}= T_{c12}$
$T_{i9}= T_{j7}= T_{c13}$
$T_{j8}= T_{c14}$ $T_{j9}= T_{c15}$

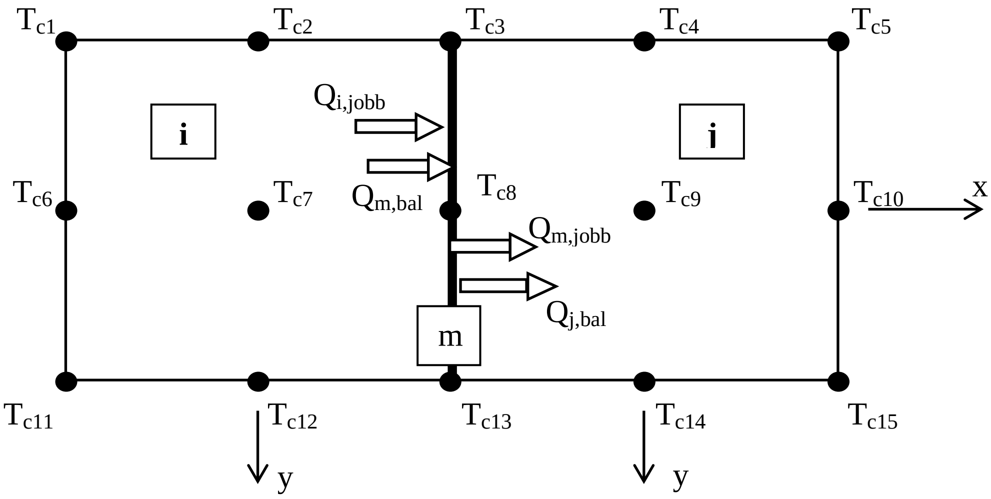
$Q_{i,jobb} = Q_{j,bal}$

A bal oldali elem jobb oldalán kilépő hőmennyiség egyenlő a jobb oldali elem bal oldalán belépő hőmennyiséggel. Behelyettesítve a (17b) és a (17a) egyenleteket:

$$k_i\, y_i/x_i\,(-16T_{c7} +12T_{c8} +4T_{c6} +3T_{c3} +3T_{c13} +T_{c1} +T_{c11} -4T_{c2} -4T_{c12}) =$$
$$= k_j\, y_j/x_j\,(16T_{c9} -12T_{c8} - 4T_{c10} -3T_{c3} - 3T_{c13} -T_{c5} -T_{c15} +4T_{c4} +4T_{c14})$$

(28) $$k_i/x_i\, T_{c1} - 4\, k_i/x_i\, T_{c2} + (3k_i/x_i + 3k_i/x_i)\, T_{c3} - 4\, k_j/x_j\, T_{c4} + k_j/x_j\, T_{c5} +$$
$$+ 4k_i/x_i\, T_{c6} - 16\, k_i/x_i\, T_{c7} + (12k_i/x_i + 12k_j/x_j)\, T_{c8} - 16\, k_j/x_j\, T_{c9} + 4k_j/x_j\, T_{c10} +$$
$$+ k_i/x_i\, T_{c11} - 4\, k_i/x_i\, T_{c12} + (3k_i/x_i + 3k_j/x_j)\, T_{c13} - 4\, k_j/x_j\, T_{c14} + k_j/x_j\, T_{c15} = 0$$

6.3 Hőátadás vízszintesen vonal-elem és két oldalán levő téglalap-elemek között



$Q_{m,bal} = Q_{i,jobb}$ $Q_{m,jobb} = Q_{i,bal}$

A vonal elem hőegyensúlyi egyenletébe (22) -be behelyettesítjük a (17b) és a (17a) egyenleteket:

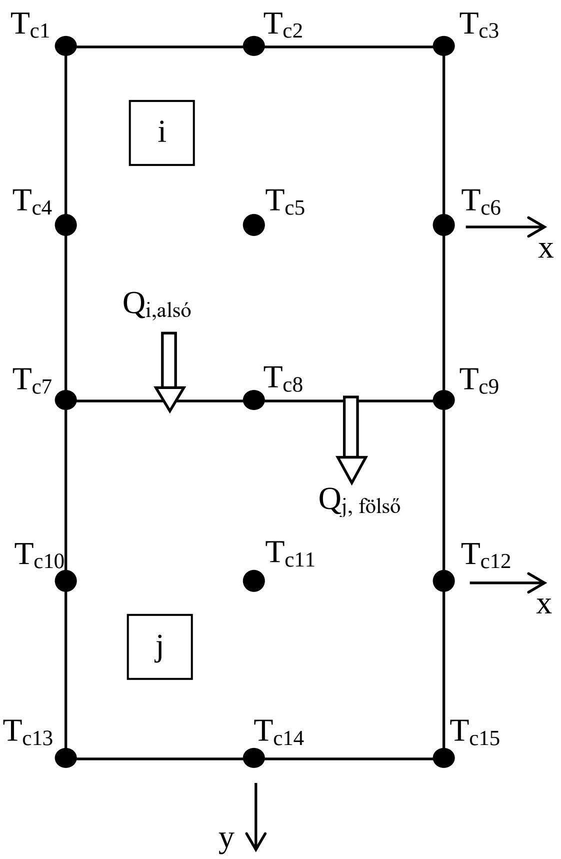
$$k_v v_m/y_m * (2T_{m1} - 4T_{m2} + 2T_{m3}) = Q_{m,jobb} - Q_{m,bal}$$

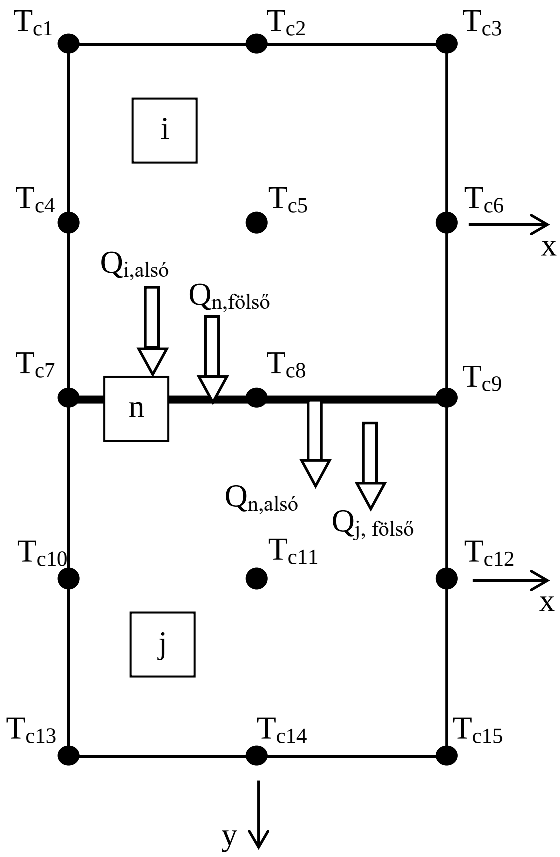
$$Q_{i,jobb} - Q_{j,bal} = k_v v_m/y_m\, (2T_{m1} - 4T_{m2} + 2T_{m3})$$

$$k_i\, y_i/x_i\,(-16T_{c7} +12T_{c8} +4T_{c6} +3T_{c3} +3T_{c13} +T_{c1} +T_{c11} -4T_{c2} -4T_{c12}) -$$
$$- k_j\, y_j/x_j\,(16T_{c9} -12T_{c8} - 4T_{c10} -3T_{c3} - 3T_{c13} -T_{c5} -T_{c15} +4T_{c4} +4T_{c14}) = k_v v_m/y_m\, (2T_{c3} - 4T_{c8} + 2T_{c13})$$

(29) $$k_i/x_i\, T_{c1} - 4\, k_i/x_i\, T_{c2} + (3k_i/x_i + 3k_i/x_i -12k_v v_m/y_m^2)\, T_{c3} - 4\, k_j/x_j\, T_{c4} + k_j/x_j\, T_{c5} +$$
$$+ 4k_i/x_i\, T_{c6} - 16\, k_i/x_i\, T_{c7} + (12k_i/x_i + 12k_j/x_j +24k_v v_m/y_m^2)\, T_{c8} - 16\, k_j/x_j\, T_{c9} + 4k_j/x_j\, T_{c10} +$$
$$+ k_i/x_i\, T_{c11} - 4\, k_i/x_i\, T_{c12} + (3k_i/x_i + 3k_j/x_j -12k_v v_m/y_m^2)\, T_{c13} - 4\, k_j/x_j\, T_{c14} + k_j/x_j\, T_{c15} = 0$$

6.4 Hőátadás függőlegesen téglalap-elemek és köztük levő vonal-elem között





Az előző pontokhoz hasonlóan téglalap elemek között:

(30) $k_i/y_i\,T_{c1} + 4k_i/y_i\,T_{c2} + k_i/y_i\,T_{c3} - 4k_i/y_i\,T_{c4} - 16k_i/y_i\,T_{c5} - 4k_i/y_i\,T_{c6} +$
$+ (3k_i/y_i + 3k_j/y_j)\,T_{c7} + (12k_i/y_i + 12k_j/y_j)\,T_{c8} + (3k_i/y_i + 3k_j/y_j)\,T_{c9} -$
$- 4k_j/y_j\,T_{c10} - 16k_j/y_j\,T_{c11} - 4k_j/y_j\,T_{c12} + k_j/y_j\,T_{c13} + 4k_j/y_j\,T_{c14} + k_j/y_j\,T_{c15} = 0$

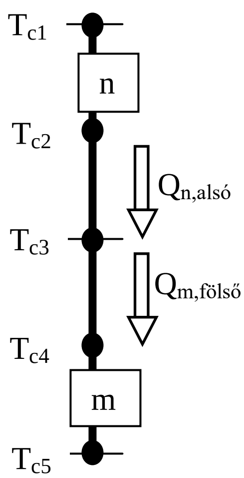
Köztes vonal-elem esetén:

(31) $k_i/y_i\,T_{c1} + 4k_i/y_i\,T_{c2} + k_i/y_i\,T_{c3} - 4k_i/y_i\,T_{c4} - 16k_i/y_i\,T_{c5} - 4k_i/y_i\,T_{c6} +$
$+(3k_i/y_i +3k_j/y_j -12k_v v_n/x_n^2)T_{c7} +(12k_i/y_i +12k_j/y_j+24k_v v_n/x_n^2)T_{c8} +(3k_i/y_i +3k_j/y_j-12k_v v_n/x_n^2)T_{c9} -$
$- 4k_j/y_j\,T_{c10} - 16k_j/y_j\,T_{c11} - 4k_j/y_j\,T_{c12} + k_j/y_j\,T_{c13} + 4k_j/y_j\,T_{c14} + k_j/y_j\,T_{c15} = 0$

6.5 Hőátadás a kazetta vonal elemek között

A) függőleges kazettaelemek közötti hőátadás

A két szomszédos elem csomópontjait c indexszel összevontan számoztuk. Az n, és m indexű hőmérsékletek és a c indexű hőmérsékletek az alábbiak szerint egyeznek meg, a lemezvastagság pedig egyenlő.

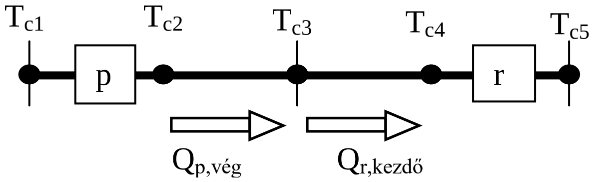


$T_{n1} = T_{c1}$ $\quad T_{n2} = T_{c2}$ $\quad T_{n3} = T_{c3}$ $\quad v_n = v_m\,T_{c1}$
$T_{m1}= T_{c3}$ $\quad T_{m2}= T_{c4}$ $\quad T_{m3}= T_{c5}$

A c3 csomópontba érkező hőmennyiségek összege 0. $\quad T_{c2}$
$Q_{n,alsó} = Q_{m,fölső}$ $\quad Q_{n,alsó}$
Behelyettesítve a (19b) és (19a) egyenleteket: $\quad T_{c3}$
$k_v v_n\,(T_{c1} -4T_{c2} +3T_{c3})\,/y_n = k_v\,v_m\,(-3T_{c3} +4T_{c4} -T_{c5})\,/y_m$ $\quad Q_{m,fölső}$

(32) $1/y_n\,T_{c1}-4/y_n\,T_{c2} + (3/y_n+3/y_m)\,T_{c3}-4/y_m\,T_{c4} +1/y_n\,T_{c5} = 0$ $\quad T_{c4}$

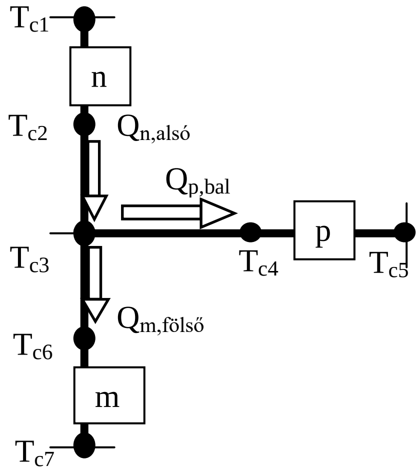
B) vízszintes kazettaelemek közötti hőátadás



Az előző ponthoz hasonlóan:

(33) $1/x_p\, T_{c1} - 4/x_p\, T_{c2} + (3/x_p + 3/x_r)\, T_{c3} - 4/x_r\, T_{c4} + 1/x_r\, T_{c5} = 0$

C) hőátadás kazetta belső felület és gerinc csomópontjában



A három csatlakozó elem csomópontjait c indexszel összevontan számoztuk. Az n, m és r indexű hőmérsékletek és a c indexű hőmérsékletek az alábbiak szerint egyeznek meg. A n és m elem lemezvastagsága egyenlő, a p elem lemezvastagsága pedig ezek duplája, hiszen a gerincnél a két kazetta találkozik.

$T_{n1} = T_{c1}$ $\quad T_{n2} = T_{c2}$ $\quad T_{n3} = T_{c3}$ $\quad v_n = v_m$
$T_{m1} = T_{c3}$ $\quad T_{m2} = T_{c6}$ $\quad T_{m3} = T_{c7}$ $\quad v_p = 2v_m$
$T_{p1} = T_{c3}$ $\quad T_{p2} = T_{c4}$ $\quad T_{p3} = T_{c5}$

A c3 csomópontba érkező hőmennyiségek összege 0:

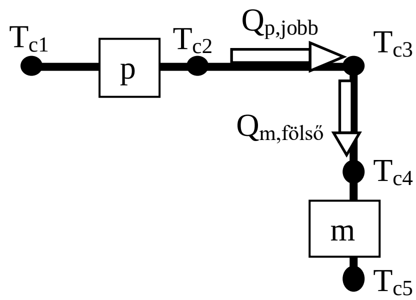
$Q_{n,alsó} = Q_{m,fölső} + Q_{p,bal}$

Behelyettesítve a (19b), a (19a) és a (18a) egyenleteket:

$$k_v v_n (T_{c1} - 4T_{c2} + 3T_{c3}) / y_n = k_v\, v_m (-3T_{c3} + 4T_{c6} - T_{c7}) / y_m + \quad T_{c6}$$
$$+ k_v\, v_p (-3T_{c3} + 4T_{c4} - T_{c5}) / x_p$$

(34) $1/y_n\, T_{c1} - 4/y_n\, T_{c2} + (3/y_n + 3/y_m + 6/x_p)\, T_{c3} - 8/x_p\, T_{c4} + 2/x_p\, T_{c5} - 4/y_m\, T_{c6} + 1/y_m\, T_{c7} = 0$

D) hőátadás kazetta gerinc és külső öv csomópontjában



$T_{p1} = T_{c1}$ $\quad T_{p2} = T_{c2}$ $\quad T_{p3} = T_{c3}$ $\quad v_p = v_m$
$T_{m1} = T_{c3}$ $\quad T_{m2} = T_{c4}$ $\quad T_{m3} = T_{c5}$

A c3 csomópontba érkező hőmennyiségek összege 0:

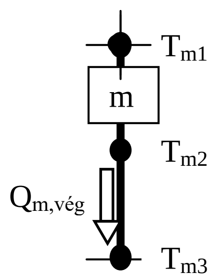
$Q_{p,jobb} = Q_{m,fölső}$

Behelyettesítve a (18b) és (19a) egyenleteket:

$$k_v v_n (T_{c1} - 4T_{c2} + 3T_{c3}) / x_p = k_v\, v_m (-3T_{c3} + 4T_{c4} - T_{c5}) / y_m + \quad T_{c5}$$

(35) $1/x_p\, T_{c1} - 4/x_p\, T_{c2} + (3/x_p + 3/y_m +)\, T_{c3} - 4/y_m\, T_{c4} + 1/y_m\, T_{c5} = 0$

E) külső öv vége



A külső öv végénél a kazetta vonal elem hővezetése megszűnik.

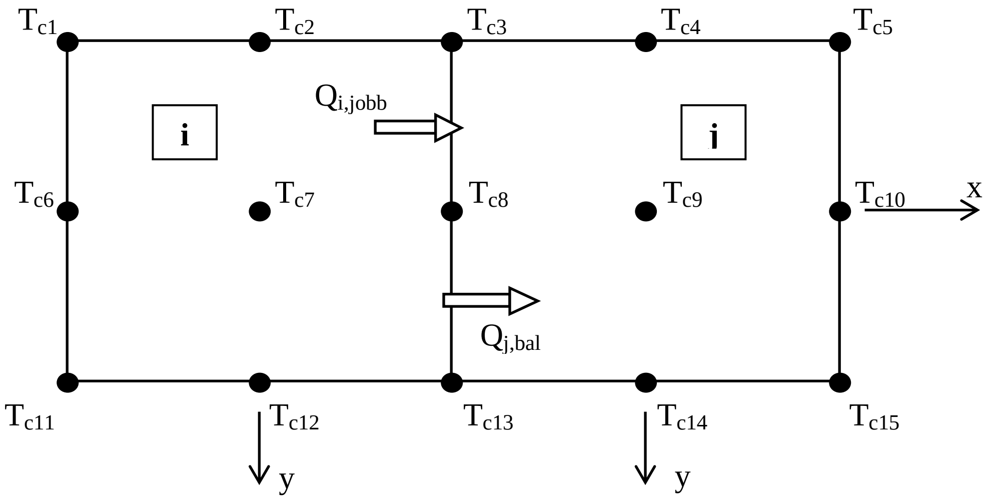
$Q_{m,vég} = 0$

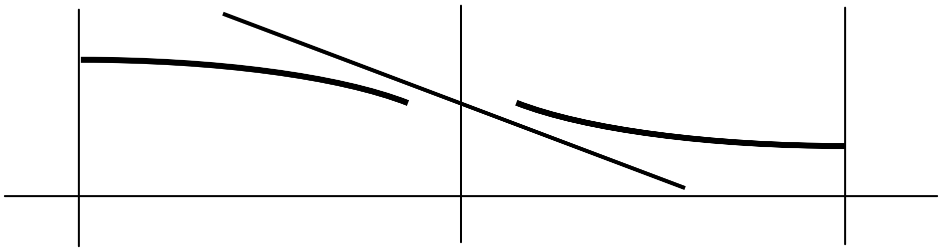
Behelyettesítve a (19b) egyenletet:

$$k_v\, v_m * 1/2\, (T_{m1} - 4T_{m2} + 3T_{m3}) / y_m = 0$$

(36) $T_{m1} - 4T_{m2} + 3T_{m3} = 0 \quad T_{m3}$

6.6 Vízszintes hővezetési folytonosság a szomszédos téglalap-elemek pontjaiban





Az előzőekben vizsgáltuk, hogy az egyik elemből kilépő hőmennyiség egyenlő a másikba belépő hőmennyiséggel a csatlakozási vonal mentén. A függvények illeszkedése még pontosabb, ha e hőfolytonosság pontonként is igaz.

Vegyünk föl a hőmérsékletfüggvényen egy metszetet az alsó élen ($y_c = y_i = y_j$). A c13 pontban x irányban a hőáramlás akkor folytonos, ha a q hőáram a bal oldali függvény jobb oldalán és a jobb oldali függvény bal oldalán egyenlő.

$$q_{i,x}(x_i\,;\,y_i) = q_{j,x}(-x_j\,;\,y_j)$$

A (16a) kifejezést a behelyettesítve:

$$k_i * Ti'_x(x_i\,;\,y_i) = k_j * Tj'_x(-x_j\,;\,y_j)$$

Ha a két elemben a hővezetési tényező egyenlő, akkor a deriváltak is egyenlőek, tehát a hőmérsékletfüggvényben nincs törés.

A (12) képlet szerinti függvényt deriválva, és a változók helyére beírva az x_i , y_i , x_j , y_j értékeket:

$$2a_i x_i y_i^2 + 2b_i x_i y_i + c_i y_i^2 + 2d_i x_i + f_i y_i + g_i = -2a_j x_j y_j^2 - 2b_j x_j y_j + c_j y_j^2 - 2d_j x_j + f_j y_j + g_j$$

Behelyettesítve a (13) kifejezéseket, és áttérve a c indexű csomópontszámozásra – a levezetést mellőzve – az alábbi összefüggést kapjuk:

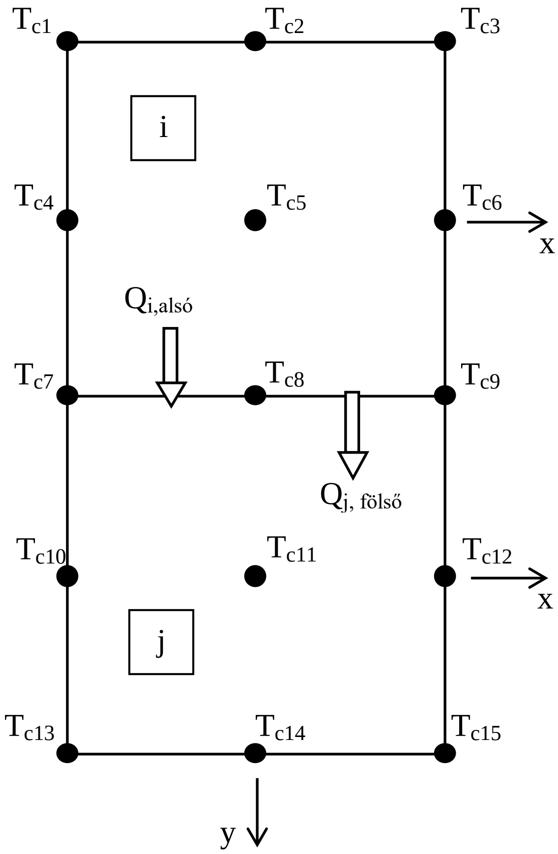
(37a) $k_i/x_i\, T_{c11} - 4k_i/x_i\, T_{c12} + (3k_i/x_i + 3k_j/x_j)\, T_{c13} - 4k_j/x_j\, T_{c14} + k_j/x_j\, T_{c15} = 0$

Ha a folytonosságot a c3, ill. a c8 pontban követeljük meg, akkor ugyanígy levezethető, hogy:

(37b) $k_i/x_i\, T_{c1} - 4k_i/x_i\, T_{c2} + (3k_i/x_i + 3k_j/x_j)\, T_{c3} - 4k_j/x_j\, T_{c4} + k_j/x_j\, T_{c5} = 0$

(37c) $k_i/x_i\, T_{c6} - 4k_i/x_i\, T_{c7} + (3k_i/x_i + 3k_j/x_j)\, T_{c8} - 4k_j/x_j\, T_{c9} + k_j/x_j\, T_{c10} = 0$

6.7 Függőleges hővezetési folytonosság a szomszédos téglalap-elemek pontjaiban



Az előző ponthoz hasonlóan levezethető, hogy ha a folytonosságot függőleges irányban a c7, a c8 ill. a c9 pontban követeljük meg, akkor:

(38a) $k_i/y_i\, T_{c1} - 4k_i/y_i\, T_{c4} + (3k_i/y_i + 3k_j/y_j)\, T_{c7} - 4k_j/y_j\, T_{c10} + k_j/y_j\, T_{c13} = 0$

(38b) $k_i/y_i\, T_{c2} - 4k_i/y_i\, T_{c5} + (3k_i/y_i + 3k_j/y_j)\, T_{c8} - 4k_j/y_j\, T_{c11} + k_j/y_j\, T_{c14} = 0$

(38c) $k_i/y_i\, T_{c3} - 4k_i/x_i\, T_{c6} + (3k_i/y_i + 3k_j/y_j)\, T_{c9} - 4k_j/y_j\, T_{c12} + k_j/y_j\, T_{c15} = 0$

7. Az egyenletrendszer összeállítása

Az 1. pontban látható felosztással 10 db téglalap elemet és 7 db vonal-elemet kaptunk, a csomópontok száma pedig 50.

Az ismeretlenek minden egyenletben a csomóponti hőmérsékletek. Az 50db csomóponti hőmérsékletet fölírjuk egy fejlécben vízszintesen egymás mellé. A fejléc alatt soronként lesz egy egyenlet. Megnézzük, hogy egy bizonyos egyenlet indexelt csomópontjai a szerkezet mely index nélküli csomópontjainak felelnek meg, s az együtthatókat ezeknek a csomóponti hőmérsékleteknek az oszlopába írjuk. Például az 1-es téglalap elem egyensúlyi egyenletében 9db csomóponti hőmérséklet szerepel, ezek a (20) egyenlet szerint T_{i1} - T_{i9}, ezek a szerkezet globális rendszerében az alábbi csomóponti hőmérsékleteknek felelnek meg:

$T_{i1} = T_1$ $T_{i2} = T_2$ $T_{i3} = T_3$
$T_{i4} = T_6$ $T_{i5} = T_7$ $T_{i6} = T_8$
$T_{i7} = T_{11}$ $T_{i8} = T_{12}$ $T_{i9} = T_{13}$

Tehát az 1-es elem egyensúlyi egyenletében az együtthatókat az 1, 2, 3, 6, 7, 8, 11, 12, 13 oszlopokba írjuk. Az egyenletben más csomóponti hőmérséklet nem szerepel, ezért a többi oszlopba 0 –át írunk. Az egyenlet jobb oldalán 0 szerepel, tehát oda 0-át fogunk írni. Annyi egyenletet kell összeszednünk, amennyi ismeretlen van, esetünkben 50 db-ot. Ha ez megvan, kapunk egy 50 ismeretlenes egyenletrendszert, melynek együtthatómátrixát a fentiek szerint kell kitölteni. A mátrix sorai elé odaírjuk, hogy milyen egyenletről van szó. Az egyenletek jobb oldalán szereplő mennyiségeket egy külön oszlopba írjuk.

Példánkban az 50 egyenlet a következő lesz:

(20) szerint minden téglalap elem egyensúlyi egyenlete	10 db
(27) szerint hőfelvétel a belső oldalon minden elemre	5 db
(28) szerint vízszintes hőátadás minden téglalap párra	4 db
(29) szerint vízszintes hőátadás kazetta külső övén	1 db
(26) szerint hőleadás a külső oldalon minden elemre	5 db
(30) szerint függőleges hőátadás minden téglalap párra	9 db
(31) szerint függőleges hőátadás kazetta gerincén	1 db
(32) szerint függőleges hőátadás minden vonal-elem párra	4 db
(34) szerint hőátadás kazetta belső oldal-gerinc csomópontban	1 db
(35) szerint hőátadás kazetta gerinc-külső öv csomópontban	1 db
(36) szerint hővezetés megszűnése kazetta külső öv végén	1 db
(37) szerint vízszintes hővezetési folytonosság a 3, 13, 23 pontokban	3 db
(38) szerint függ. hővezetési folytonosság az 5, 15, 25, 35, 45 pontokban	5 db
összesen	50 db

8. Az egyenletrendszer megoldása és a végeredmény

Az egyenletrendszert megoldva az összes csomópontban megkapjuk a hőmérsékletet. Erre kész szoftverek állnak rendelkezésre, 50 ismeretlenig még excelben is lehetséges.

A falszerkezeten áthaladó hőmennyiséget a (23) egyenlet segítségével határozhatjuk meg. Ez az egyenlet a belső oldalon a kazetta hátlapja által fölvett hőmennyiséget adja meg, tehát ki kell számolni valamennyi belső felületelemre, és ezeket összegezni kell (példánkban ezek a 11-15 vonal-elemek).

Az áthaladó hőmennyiséget osztva a kazetta szélességével (0,6 m) és a külső-belső hőmérséklet-különbséggel megkapjuk a hőátbocsátási tényezőt.

Székesfehérvár, 2004.05.17.

Sas Viktor
okl. építőmérnök
matematikus szakmérnök